Lieu singulier des surfaces rationnelles réglées

Nicolas Perrin
Université de Versailles
45 avenue des États-Unis
78035 Versailles Cedex
email : perrin@math.uvsq.fr

Table des matières

Introduction

Dans cet article, nous appelons surface réglée toute surface de $\mathbb{P}^3$ recouverte par une famille de dimension 1 de droites de l'espace, ce sont les génératrices de la surface. Cette définition correpond à la notion historique de surface réglée. Une telle surface est définie par une courbe tracée sur la grassmannienne $\mathbb{G}$ des droites de $\mathbb{P}^3$. La surface est rationnelle si la courbe de $\mathbb{G}$ l'est. Le lieu singulier de la surface est l'ensemble des points d'intersection de deux génératrices.

Dans [P1], nous avons constaté que dans le cas des surfaces quintiques rationnelles réglées, le lieu singulier de la surface détermine complètement la surface. Nous nous proposons dans cet article d'étudier le problème suivant :

Problème : *Toute surface rationelle réglée est-elle déterminée par son lieu singulier ?*

Nous étudierons ce problème pour les surface rationnelles réglées *paramétrées*. L'ensemble de ces surfaces est représenté par le schéma $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$ des morphismes de degré d de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{G}$ (voir [GR]). Pour tout morphisme f, la surface correspondante est définie par la courbe $f(\mathbb{P}^1)$ et le morphisme nous donne un paramétrage de cette courbe par $\mathbb{P}^1$. La variété $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$ est irréductible et lisse de dimension $4d + 4$ (voir [P2]). Elle est munie d'actions de PGL_2 et de $PO(q)$ où q est la forme quadratique définissant $\mathbb{G}$ dans $\mathbb{P}^5$. Nous identifierons PGL_4 à $PSO(q)$. Le lieu singulier *abstrait* d'une surface rationnelle paramétrée $f \in \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$ est défini par :

Définition : *Le lieu singulier abstrait de la surface f est l'ensemble des paires de génératrices*

qui se coupent, on le note $\Psi(f)$.

C'est en général une courbe de degré $d-2$ de $S^2\mathbb{P}^1$. Une surface rationelle réglée de degré inférieur à 2 générale est lisse. Nous supposerons donc que $d \geq 3$. De plus, si la surface f ou sa duale est un cône, alors son lieu singulier abstrait est $S^2\mathbb{P}^1$ tout entier. Notons $\mathbf{R}_d$ l'ouvert de $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$ des morphismes f tels que l'image $f(\mathbb{P}^1)$ n'est pas contenue dans un plan totalement isotrope pour la forme quadratique q. Pour un morphisme f du fermé complémentaire, la courbe $f(\mathbb{P}^1)$ est contenue dans un (α)-plan ou un (β)-plan de $\mathbb{G}$, la surface ou sa duale est alors un cône et son lieu singulier abstrait n'est plus une courbe de $\mathbb{P}(S_2)$. Nous verrons que pour tout élément f de $\mathbf{R}_d$, le lieu singulier abstrait $\Psi(f)$ est une courbe de $S^2\mathbb{P}^1$. La variété $\mathbf{R}_d$ est munie d'action de PGL_2 et $PO(q)$. L'action induite de PGL_4 identifié à $PSO(q)$ est l'action du groupe des automorphismes de $\mathbb{P}^3$ sur les surfaces.

Nous étudions le morphisme Ψ qui a un élément de $\mathbf{R}_d$ associe son lieu singulier abstrait et montrons le théorème suivant qui répond au problème pour le lieu singulier abstrait :

Théorème : *($\imath$) Pour $d \geq 3$, le morphisme Ψ est génériquement injectif modulo isomophisme et dualité : la fibre générale de Ψ est une orbite sous $PO(q)$. Pour $d \geq 5$ la fibre générale est isomorphe à $PO(q) \backsimeq PGL_4 \ltimes \{\pm 1\}$.*

($\imath\imath$) La variété $\mathbf{R}_d$ est irréductible de dimension $4d+4$. Le morphisme Ψ est dominant pour d compris entre 3 et 5. Pour $d \geq 6$, son image est rationelle, normale de dimension $4d-11$ régulière en codimension $d-5$ et de degré :

$$\prod_{k=0}^{d-6} \frac{\binom{d+1+k}{d-5-k}}{\binom{2k+1}{k}}$$

Pour montrer ce résultat, nous utilisons l'isomorphisme exceptionnel entre $PSO(q)$ et PGL_4 qui nous permet d'avoir deux points de vue sur $\mathbb{G}$. Nous définissons ainsi deux morphismes naturels Ψ et Φ de la variété de $\mathbf{R}_d$ dans l'espace projectif des courbes de degré $d-2$ du plan. Nous montrerons que ces morphismes sont égaux.

Plus précisement, nous décrirons une stratification de la variété $\mathbf{R}_d$ et montrerons que Φ et Ψ coïncident sur la plus petite strate. Nous montrerons que la variété $\mathbf{R}_d$ est plongée dans un espace projectif et que Φ et Ψ sont alors linéaires pour ce plongement. La strate minimale engendrant cet espace, nous concluons à l'égalité des morphismes. Le morphisme Φ nous permettra de montrer l'injectivité générique et de vérifier que l'image, qui pourra être vue comme variété déterminantielle, est normale de lieu singulier en codimension $d-4$ et du degré annoncé. Nous donnerons au dernier paragraphe une paramétrisation birationnelle de l'image de Ψ ce qui nous permettra d'affirmer que cette variété est normale.

Par ailleurs, nous montrerons l'existence d'un "espace de modules des surfaces rationnelles réglées paramétrés " $\mathcal{M}(d)$ comme bon quotient de $\mathbf{R}_d$ par PGL_4. Nous étudierons quelques sous-variétés remarquables de $\mathbf{R}_d$ ainsi que leurs images par Ψ. Nous donnerons également une compactification de $\mathbf{R}_d$ et nous décrirons l'image du bord. Enfin, nous étudierons le cas des surfaces de degré 5 et retrouverons des résultats de [P1] sur la position relative d'une cubique et d'une conique.

Remerciements : Je tiens ici à remercier mon directeur de thèse Laurent Gruson pour toute l'aide qu'il m'a apportée durant la préparation de ce travail.

Notations : (i) Notons S_n la representation irréductible de dimension $n+1$ de SL_2. Nous identifierons S_n et $\check{S}_n$ grâce à la forme bilinéaire SL_2-invariante sur S_n (pour plus de détails sur les représentation de SL_2, voir [SP]). Le plan $\mathbb{P}(S_2)$ contient une conique canonique C_0 qui est l'image du plongement de Veronese de $\mathbb{P}(S_1)$. Si X est une courbe de degré n de $\mathbb{P}(S_2)$, on appelera polygône de Poncelet associé à X tout polygône complet dont les côtés sont tangents à C_0 et dont les sommets sont sur X. La courbe X sera dite en relation de Poncelet avec C_0 si elle possède au moins un polygône de Poncelet à $n+1$ côtés associé. On note $\mathfrak{P}_n$ l'ensemble de ces courbes. On note K_a le fibré de Schwarzenberger conoyau de l'injection suivante : $S_{a-2}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(-1) \longrightarrow S_a\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}$.

(ii) Nous noterons G_a le groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-a))/\mathbb{C}^*$ des automorphismes modulo homothéties du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-a)$.

(iii) Notons V l'espace vectoriel $H^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$. La forme quadratique q définissant $\mathbb{G}$ est donnée par le produit extérieur sur $\Lambda^2 V$. Nous identifierons $\Lambda^2 V$ et $\Lambda^2 \check{V}$ grâce à q. Notons K (resp. Q) le sous-fibré (resp. quotient) tautologique de $\mathbb{G}$, on a la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} V\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{G}} \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0$$

Remarque 1. (i) Le lieu singulier abstrait $\Psi(S)$ d'une surface S donne des informations sur la géométrie du lieu singulier de S : les points pinces de la surface sont exactement les points de $\Psi(S)\cap C_0$. Les points triples de S ou de sa duale correspondent aux triangles de Poncelet associés à $\Psi(S)$. Plus généralement les polygônes de Poncelets à n côtés associés à $\Psi(S)$ correspondent aux points n-uples de S ou de sa duale (ceux-ci peuvent être définis grâce aux techniques de [ACGH] et aux incidences points/diviseurs sur $\mathbb{P}^1$). Enfin, la surface S est développable si et seulement si $\Psi(S)$ contient la conique C_0.

(ii) Un élément $f \in \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$ définit une surface de $\mathbb{P}(V)$ de la façon suivante : la variété d'incidence points/droites $\mathbb{I}$ entre $\mathbb{P}(V)$ et $\mathbb{G}$ est définie au dessus de $\mathbb{G}$ par $\mathbb{P}_{\mathbb{G}}(Q)$ (Q est le fibré quotient tautologique). Ainsi, le *pull-back* par f de Q définit un morphisme de la surface réglée $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(f^*Q)$ dans $\mathbb{I}$. Par projection, on obtient une surface rationnelle S de degré d de $\mathbb{P}(V)$. Si on effectue cette construction pour le fibré $\check{K}$ on obtient alors une surface rationnelle $\check{S}$ de degré d de $\mathbb{P}(\check{V})$ qui est la surface duale de S. Nous dirons qu'une surface S est autoduale si il existe un isomorphisme entre $\mathbb{P}(V)$ et $\mathbb{P}(\check{V})$ qui identifie S et $\check{S}$.

(iii) L'action de $PGL(V)$ préserve les fibrés tautologiques K et Q de la grassmannienne. Par contre, l'action de $PO(q)$ échange Q et $\check{K}$. Nous pouvons ainsi caractériser les surfaces autoduales comme étant définies par des morphismes $f \in \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$ tels que l'orbite de f sous $PO(q)$ est la même que celle sous $PSO(q)$. Nous verrons (proposition 4) que ceci est équivalent à dire, pour une surface assez générale, que la courbe correspondante sur $\mathbb{G}$ est tracée sur un hyperplan de $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ non tangent à $\mathbb{G}$.

1 Comparaison de deux morphismes

1.1 Une stratification de $\mathbf{R}_d$

Soit $f \in \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$, le faisceau f^*Q est localement libre de rang 2 et de degré d sur $\mathbb{P}^1$. C'est par définition un quotient de $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ (grâce à la flèche $f^*\pi$) et il est décomposé. Nous avons donc une identification $f^*Q \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-a)$ avec $0 \leq a \leq d$. Ceci nous amène à donner la définition suivante :

Définition 1. Un élément $f \in \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$ est dit de type a (avec $0 \leq a \leq [\frac{d}{2}]$) si f^*Q est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-a)$. Cette définition est $PSO(q)$ et PGL_2 invariante. Notons $\mathbf{R}_{d,a}$ (resp. $\mathbf{R}'_{d,b}$) l'ensemble des surfaces paramétrées de type a (resp. dont la duale est de type b).

Remarque 2. (I) Le type de la duale est déterminé par la décomposition de $\check{K}$ (et donc par celle de K). Cette notion n'est donc pas invariante par dualité.

(II) Une surface de $\mathbf{R}_{d,0}$ est un cône de degré d. Les variétés $\mathbf{R}_{d,0}$ et $\mathbf{R}'_{d,0}$ ne sont donc pas contenues dans $\mathbf{R}_d$ mais adhérentes à $\mathbf{R}_d$. Ceci nous permet d'affirmer que pour tout élément $f \in \mathbf{R}_d$, l'application linéaire $V \longrightarrow H^0(f^*Q)$ est injective (sinon la duale est de type nul).

Proposition 1. *Dans* $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$*, les variétés* $\mathbf{R}_{d,a}$ *(resp.* $\mathbf{R}'_{d,a}$*) sont déterminantielles, de codimension* $d - 2a - 1$ *si* $a < \frac{d}{2}$ *et nulle si* $a = \frac{d}{2}$*. Elles forment une stratification. Les deux stratifications sont indépendantes : l'intersection* $\mathbf{R}_{d,a} \cap \mathbf{R}'_{d,b}$ *est de codimension* $2d - 2(a+b) - 2$.

Démonstration : Soit f_u le morphisme universel de $\mathbb{P}^1 \times \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$ dans $\mathbb{G} \times \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$ (on note p et q les projections du premier produit et p' et q' celles du second), la variété $\mathbf{R}_{d,a}$ est donnée par le lieu où la flèche de fibrés vectoriels :

$$R^1 p_*(f_u^* p'^* K \otimes p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-[\frac{d}{2}] - 1)) \longrightarrow R^1 p_*(f_u^* p'^* V \otimes p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-[\frac{d}{2}] - 1))$$

a un conoyau de dimension $[\frac{d}{2}] - a - 1$. Ceci permet de voir que ces variétés forment une stratification de $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$. De la même façon on a une stratification par le type de la duale. On peut également voir les surfaces de type a comme le lieu où la flèche de fibrés vectoriels :

$$R^1 p_*(f_u^* p'^* K \otimes p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a-2)) \longrightarrow R^1 p_*(f_u^* p'^* V \otimes p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a-2))$$

a un conoyau de dimension un. Dans ce cas la variété $\mathbf{R}_{d,a}$ a la codimension attendue comme variété déterminantielle (voir la remarque 3 pour la dimension de $\mathbf{R}_{d,a}$).

Pour déterminer l'intersection de deux strates de chacune des stratifications, on cherche les points $f \in \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$ qui correspondent à des surfaces de type a dont la duale est de type b. Ceci revient à dire que l'on a les identifications suivantes : $f^*K \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-b) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b-d)$ et $f^*Q \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-a)$. Le "pull-back" de la suite exacte tautologique de $\mathbb{G}$ à $\mathbb{P}^1$ nous permet de voir $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ comme un élément de $\mathbb{P}\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-a), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-b) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b-d))$.

Réciproquement, pour qu'une telle extension convienne, il faut et il suffit que le faisceau $\mathcal{E}$ obtenu soit trivial. Ceci se traduit par les égalités $h^0\mathcal{E}(-1) = h^1\mathcal{E}(-1) = 0$ ou encore par le fait

que le morphisme $S_{a-1} \oplus S_{d-a-1} \longrightarrow S_{b-1} \oplus S_{d-b-1}$ obtenu est un isomorphisme. Ceci est le cas pour un ouvert U de nos extensions. Regardons alors $U \times PGL_4$, nous avons un morphisme de ce produit vers $\mathbf{R}_d$: le faisceau $\mathcal{E}$ est trivial, un élément de PGL_4 nous permet d'identifier le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-a)$ quotient de $\mathcal{E}$ à un quotient de $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ ce qui nous définit un morphisme f de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{G}$. Par définition, le "pull-back" par f^* de la suite exacte tautologique de $\mathbb{G}$ à $\mathbb{P}^1$ est l'extention de départ. La surface ainsi obtenue est de type a et sa duale est de type b. La fibre de ce morphisme est exactement donné par les orbites sous $G_a \times G_b$. Ceci vient du choix d'une identification de f^*K avec $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-b) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b-d)$ et de f^*Q avec $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-a)$. Il est facile de vérifier que l'action de $G_a \times G_b$ est libre. La codimension de l'image, qui est $\mathbf{R}_{d,a} \cap \mathbf{R}'_{d,b}$, est donc $2d - 2(a+b) - 2$.

Paramétrisation des surfaces de type a.

Si on a un élément $f \in \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$ de type a, alors on peut considérer la flèche sur les sections $H^0(f^*\pi) : V \longrightarrow H^0(f^*Q)$ qui est, après identification de $H^0(f^*Q)$ avec $S_a \oplus S_{d-a}$, une application linéaire de V dans $S_a \oplus S_{d-a}$ (injective si f est dans $\mathbf{R}_d$ d'après la remarque 2). Réciproquement, pour se donner une surface de type a, il suffit de se donner une application linéaire injective de V dans $S_a \oplus S_{d-a}$ telle que la flèche $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-a)$ soit surjective.

Il est donc naturel de considérer l'ouvert $\mathbf{F}_a$ de $\mathbb{P}\mathrm{Hom}(V, S_a \oplus S_{d-a})$ des applications linéaires injectives telles que la flèche induite $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-a)$ sur les faisceaux soit surjective. L'ensemble des orbites de $\mathbf{F}_a$ sous $PGL(V)$ forme un ouvert $\mathbb{G}r_a$ de la grassmannienne $\mathbb{G}(4, S_a \oplus S_{d-a})$. Le groupe G_a agit sur $\mathbf{F}_a$ et sur $\mathbb{G}r_a$. Un élément de $\mathbf{F}_a$ définit un quotient localement libre de rang 2 et de degré d de $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ qui correpond à un morphisme de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{G}$. Ceci définit un morphisme Π_a de $\mathbf{F}_a$ dans $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$.

Remarque 3. (i) L'image du morphisme Π_a est exactement $\mathbf{R}_{d,a}$. Les fibres de Π_a sont les orbites sous l'action de G_a : il s'agit du choix de l'identification entre f^*Q et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-a)$. Il est facile de vérifier que l'action de G_a sur $\mathbf{F}_a$ est libre. La variété $\mathbf{R}_{d,a}$ est donc irréductible de dimension $3d + 2a + 5$ si $a < \frac{d}{2}$ et $4d + 4$ si $a = \frac{d}{2}$. De plus, on peut vérifier que l'action est propre et donc libre, ainsi les variétés $\mathbf{R}_{d,a}$ et $\mathbf{R}'_{d,b}$ sont lisses (voir [KO]).

(ii) Si on a un morphisme u de $\mathbf{R}_d$ (ou même de $\mathbf{R}_{d,a}$) vers un schéma X tel que u est $PGL(V)$-invariant alors on a un morphisme u_a de $\mathbb{G}r_a$ dans X qui se factorise par u.

1.2 L'espace des modules des surfaces

L'injection canonique de $\mathbb{G}$ dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ définit par composition une immersion du schéma $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$ dans $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}(\Lambda^2 V))$. Ce dernier schéma est l'ouvert des élément ψ de l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, S_d))$ tels que la flèche $\widetilde{\psi} : \Lambda^2 V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{\psi} S_d \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$ est surjective. Ainsi la variété $\mathbf{R}_d$ est le localement fermé de $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, S_d))$ défini par la condition précédente et le fait que le morphisme de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ correspondant se factorise par $\mathbb{G}$.

Nous étudions dans ce paragraphe l'action du groupe $PGL(V)$ sur $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, S_d))$. Nous identifions les points stables et semi-stables pour cette action et montrons qu'il existe un bon

quotient de $\mathbf{R}_d$ par $PGL(V)$. Nous l'appelerons "espace des modules des surfaces" et le noterons $\mathcal{M}(d)$. Remarquons que les points stables et semi-stables de $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, S_d))$ pour l'action de $PO(q)$ sont les mêmes que ceux pour l'action de $PGL(V)$, le premier étant une extension de degré 2 du second.

Proposition 2. *(ı) Un point ψ de $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, S_d))$ est instable si et seulement si il existe un vecteur $v \in V$ ou $\check{v} \in \check{V}$ tels que $\mathrm{Im}^t\psi$ est contenu dans $v \wedge V$ ou dans $\mathrm{Ker}(\Lambda^2 V \xrightarrow{\tilde{v}} V)$ où $\tilde{v} = \check{v} \wedge \mathrm{Id_V} - \mathrm{Id_V} \wedge \check{v}$.*

(ıı) Un point ψ de $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, S_d))$ est non stable si et seulement si il existe un vecteur $z = v \wedge w \in \Lambda^2 V$ tel que $\mathrm{Im}^t\psi$ est contenu dans $z^\perp$ l'orthogonal de z pour la forme quadratique q.

Démonstration : Considérons une base $(e_i)_{i \in [1,4]}$ de V et un sous-groupe a un paramètre de $SL(V)$ diagonalisé dans cette base de telle sorte qu'il agisse avec un poids α_i sur e_i et que l'on ait $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$.

Nous pouvons alors vérifier qu'un élément $x = \sum_{i<j} a_{i,j} e_i \wedge e_j$ avec $a_{i,j} \in S_d$ est instable pour ce sous-groupe si et seulement si $a_{1,4} = a_{2,4} = a_{3,4} = 0$ ou $a_{2,3} = a_{2,4} = a_{3,4} = 0$. Ceci est équivalent à dire que x est dans $\mathrm{Ker}(\Lambda^2 V \xrightarrow{\tilde{e_4}} V)$ ou dans $e_1 \wedge V$.

De même, l'élément x est non stable pour ce sous-groupe si et seulement si $a_{3,4} = 0$ ce qui signifie que x est dans l'orthogonal de $e_1 \wedge e_2$ pour la forme quadratique q.

Remarque 4. Nous pouvons traduire géométriquement la proposition précédente. Soit f un élément de $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}(\Lambda^2 V))$, il est instable si et seulement si $f(\mathbb{P}^1)$ est contenu dans un plan isotrope pour q. Il est non stable si et seulement si $f(\mathbb{P}^1)$ est contenu dans un hyperplan tangent à la grassmannienne.

Corollaire 1. *Il existe un bon quotient, noté $\mathcal{M}(d)$, de la variété $\mathbf{R}_d$. C'est l'espace des modules des surfaces rationnelles réglées paramétrées.*

Démonstration : Il suffit de montrer que tous les points de $\mathbf{R}_d$ sont semi-stables. Mais la remarque précédente nous permet de dire qu'un point $f \in \mathbf{R}_d$ est semi-stable si et seulement si la courbe $f(\mathbb{P}^1)$ n'est pas contenue dans un (α)-plan ou un (β)-plan de $\mathbb{G}$ ce qui signifie exactement que la surface et sa duale ne sont pas des cônes.

Remarque 5. L'espace des modules $\mathcal{M}(d)$ est normal comme bon quotient d'une variété lisse (voir [MFK]). De plus sur l'ouvert des points stables, l'action de $PGL(V)$ est libre (voir proposition 4 pour l'étude des orbites) et fermée ([MFK] proposition 2.4) donc ([MFK] proposition 0.9) la variété $\mathcal{M}(d)$ est lisse sur l'image de l'ouvert des points stables. Elle est donc régulière en codimension $2d-8$ (voir proposition 4 pour la dimension de l'image des points semi-stables).

1.3 Le morphisme vers le lieu singulier

Le lieu singulier d'une surface rationnelle réglée est l'ensemble des points de la surface qui sont sur deux génératrices. Nous définissons maintenant schématiquement le lieu singulier abstrait d'une surface rationnelle réglée paramétrée. Nous utilisons pour ceci les techniques de [ACGH]

et l'incidence point/diviseur sur $\mathbb{P}^1$. Nous vérifions que c'est une courbe de $S^2\mathbb{P}^1$ sauf si la surface ou sa duale est un cône.

Soit f un élément de $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$, alors $f^*\pi$ est une sujection de $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ dans f^*Q qui est un faisceau localement libre de rang 2 et de degré d. Notons q et p les projections de la variété d'incidence de $S^2\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ sur le premier et le second facteur, nous pouvons construire la composée suivante : $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)} \longrightarrow V \otimes q_* p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow q_* p^*(f^*Q)$. Soit R le conoyau de cette flèche.

Définition 2. Le lieu singulier abstrait de $f \in \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$ est le $0^{\text{ième}}$ idéal de Fitting du faisceau R défini ci-dessus. Ensemblistement, il correspond aux paires de génératrices qui se rencontrent, on le note $\Psi(f)$.

Lemme 1. *Soit $f \in \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$, le schéma $\Psi(f)$ est une courbe de degré $d-2$ si et seulement si f est dans $\mathbf{R}_d$. L'application Ψ ainsi définie sur $\mathbf{R}_d$ est $PO(q)$-invariante et à valeurs dans $\mathbb{P}(S^{d-2}S_2)$, la variété des courbes de degré $d-2$ de $\mathbb{P}(S_2)$.*

Démonstration : Le lieu singulier abstrait est une variété déterminantielle, il est donc vide ou de codimension au plus 1. Il ne peut être vide si le degré de la surface est au moins 3 et si il est de codimension nulle, ceci signifie que toutes les génératrices de la surface se rencontrent. Ceci n'est possible que si la surface ou sa duale est un cône.

Le faisceau R admet la résolution suivante :

$$H^0(f^*Q(-2)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(-1) \xrightarrow{A} (H^0(f^*Q)/V) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)} \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

Ainsi le lieu singulier abstrait est une courbe de degré $d-2$ sur $\mathbb{P}(S_2)$ pour tout $f \in \mathbf{R}_d$ et son équation est donnée par le déterminant de A.

Pour montrer l'invariance sous $PO(q)$ il suffit de prouver l'invariance par dualité et par $PSO(q) \simeq PGL(V)$. L'invariance sous $PGL(V)$ est évidente car le lieu singulier abstrait ne dépend que de l'image de V dans $H^0(f^*Q)$. Pour l'invariance par dualité, on dualise la suite exacte précédente :

$$0 \longrightarrow (H^0(f^*Q)/V)\check{} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(-1) \longrightarrow H^0(f^*Q(-2))\check{} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)} \longrightarrow \mathbf{Ext}^1(R(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}) \longrightarrow 0$$

En tenant compte des isomorphismes donnés par la dualité de Serre entre $(H^0(f^*Q)/V)\check{}$ et $H^0(f^*\check{K}(-2))$ et entre $H^0(f^*Q(-2))\check{}$ et $H^0(f^*\check{K})/\check{V}$, on voit que la flèche définissant le lieu singulier de la duale est la transposée de A. Ainsi son déterminant est le même. Cette application est donc invariante sous l'action de $PO(q)$.

Proposition 3. *L'application Ψ se factorise par $\mathbb{G}r_a$ au dessus de $\mathbf{R}_{d,a}$, le morphisme Ψ_a ainsi obtenu est PGL_2-linéaire pour le plongement de Plücker de $\mathbb{G}r_a$ dans $\mathbb{P}(\Lambda^4(S_a \oplus S_{d-a}))$.*

Démonstration : Le morphisme Ψ est invariant sous $PGL(V)$ il se factorise donc par $\mathbb{G}r_a$ au dessus de $\mathbf{R}_{d,a}$ (remarque 3). Sur $\mathbb{G}r_a \times \mathbb{P}(S_2)$ le morphisme Ψ_a est donné par le déterminant de l'application suivante (on note $\mathcal{V}$ le sous-fibré tautologique et pr_1 et pr_2 les projections sur le premier et le second facteur) :

$$(S_{a-2} \oplus S_{d-a-2}) \otimes {\mathrm{pr}_2}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)} \longrightarrow ((S_a \oplus S_{d-a})/{\mathrm{pr}_1}^* \mathcal{V}) \otimes {\mathrm{pr}_2}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(1)$$

il est donc donné par le produit extérieur d'ordre $d-2$ puis par projection sur $\mathbb{G}r_a$ par :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{G}r_a} \longrightarrow (\Lambda^4\mathcal{V})\check{} \otimes S^{d-2}S_2$$

Le morphisme Ψ_a est donc bien linéaire car $(\Lambda^4\mathcal{V})\check{}$ est de degré 1 pour le plongement de Plücker.

Remarque 6. Le morphisme Ψ se factorise par $\mathcal{M}(d)$. Le morphisme induit de $\mathcal{M}(d)$ vers $\mathbb{P}(S^{d-2}S_2)$ est compatible avec l'action de PGL_2. Nous décrirons géométriquement ses fibres pour les surfaces de degré 5 (voir proposition 14).

1.4 Le morphisme Φ

Nous construisons maintenant un second PGL_2-morphisme Φ de $\mathbf{R}_d$ dans $\mathbb{P}(S^{d-2}S_2)$ qui sera plus facile à étudier que Ψ. Nous calculerons ses fibres et le degré de son image. Le morphisme Φ sera encore invariant sous $PO(q)$. Nous montrerons que c'est le bon quotient de $\mathbf{R}_d$ sous $PO(q)$.

Nous définissons le morphisme Φ sur tout l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2V, S_d))$. Rappelons que l'on a les inclusions $\mathbf{R}_d \subset \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}(\Lambda^2V)) \subset \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2V, S_d))$. La seconde est donnée de la façon suivante : si on a un élément $f \in \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}(\Lambda^2V))$, il se décompose en

- une partie canonique : le plongement de Veronese $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}(S_d)$ (défini par $x \mapsto x^d$) et dont l'image est C_d la courbe rationnelle normale (invariante sous PGL_2).
- une projection de $\mathbb{P}(S_d) \dashrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2V)$ qui est donnée par un élément $\psi \in \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2V, S_d))$.

L'application linéaire ψ est définie par les sections de la surjection $\widetilde{\psi} : \Lambda^2V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$. Réciproquement un élément de $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2V, S_d))$ définit un morphisme de degré d de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{G}$ si et seulement si l'application $\widetilde{\psi}$ ci-dessus induite sur les faisceaux est surjective.

Notons $\mathbb{P}(S^2S_d)$ l'ensemble des formes quadratiques sur S_d. Un élément ψ de l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2V, S_d))$ définit une projection $\mathbb{P}(S_d) \dashrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2V)$. Si on "remonte" la forme quadratique q par cette projection, on obtient une forme quadratique de rang inferieur ou égal à 6 sur S_d. Nous définissons ainsi le PGL_2-morphisme suivant :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{P}\mathrm{Hom}(\Lambda^2V, S_d) &\longrightarrow \mathbb{P}(S^2S_d) \\ \psi &\mapsto \psi q {}^t\psi \end{aligned}$$

L'application Φ est définie en dehors du fermé de $\mathbb{P}\mathrm{Hom}(\Lambda^2V, S_d)$ des ψ tels que l'image de ${}^t\psi$ est contenue dans un sous-espace totalement isotrope de Λ^2V. Ainsi Φ est définie sur l'ouvert des points semi-stables (voir proposition 2) et donc sur $\mathbf{R}_d$ tout entier.

Remarque 7. (i) Soit $f \in \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}(\Lambda^2V))$. En tant que quadrique, la forme quadratique $\Phi(f)$ contient la courbe rationnelle normale C_d si et seulement si la courbe $f(\mathbb{P}^1)$ était tracée sur $\mathbb{G}$. En effet, l'image de la quadrique $\Phi(f)$ par la projection $\mathbb{P}(S_d) \dashrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2V)$ est exactement $\mathbb{G}$ alors que celle de C_d est $f(\mathbb{P}^1)$.

(ii) L'image de $\mathbf{R}_d$ par Φ est donc contenue dans l'ensemble des quadriques de $\mathbb{P}(S_d)$ contenant la courbe rationnelle normale C_d, c'est l'espace projectif $\mathbb{P}(H^0\mathcal{I}_{C_d}(2))$. Mais l'espace vectoriel $H^0\mathcal{I}_{C_d}(2)$ est le noyau de $H^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_d)}(2) \longrightarrow H^0\mathcal{O}_{C_d}(2)$ et s'identifie à S^2S_{d-2}. La loi de réciprocité de Hermite (voir [SP]) nous permet d'identifier S^2S_{d-2} à $S^{d-2}S_2$. Ainsi, le morphisme Φ défini sur $\mathbf{R}_d$ est à valeur dans $\mathbb{P}(S^{d-2}S_2)$ l'espace des courbes de degré $d-2$ de $\mathbb{P}(S_2)$.

Nous allons montrer au théorème 1 que ce morphisme est le même que Ψ. L'égalité de Ψ et de Φ nous permettra de déterminer les fibres de Ψ (cf. théorème 2) et le degré de son image ainsi que celui de certaines sous-variétés particulières de cette image (cf. Théorème 4).

Notons $\mathbf{Q}_k$ le localement fermé de $\mathbb{P}(S^2 S_d)$ des formes quadratiques de rang exactement k. Le fermé des formes quadratiques qui contiennent la courbe rationnelle normale C_d est une sous-variété linéaire de $\mathbb{P}(S^2 S_d)$ isomorphe à $\mathbb{P}(S^{d-2} S_2)$ (voir remarque 7), notons $\mathbf{q}_k$ l'intersection de $\mathbf{Q}_k$ et de ce sous-espace linéaire. Remarquons que $\mathbf{q}_3$ est fermé car $\overline{\mathbf{q}}_2$ est vide. En effet, il n'y a pas de forme quadratique de rang au plus 2 contenant C_d sinon cette dernière serait contenue dans un hyperplan. Notons enfin $\mathbf{R}_d^k$ les images réciproques des $\mathbf{q}_k$.

Lemme 2. *L'application Φ est définie sur les points semi-stables de $\mathbb{P}\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, S_d)$, elle invariante sous l'action de $PO(q)$ et son image est $\overline{\mathbf{Q}}_6$.*

La restriction de Φ à $\overline{\mathbf{R}_d}$ est définie en dehors des fermés $\overline{\mathbf{R}_{d,0}}$ et $\overline{\mathbf{R}'_{d,0}}$ et son image est $\overline{\mathbf{q}}_6$. On a $\Phi^{-1}(\Phi(\overline{\mathbf{R}_d})) = \overline{\mathbf{R}_d}$ ce qui signifie que les fibres de $\Phi|_{\overline{R_d}}$ sont les mêmes que celles de Φ sur tout l'espace $\mathbb{P}\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, S_d)$.

L'application Φ se factorise sur $\mathbb{G}r_a$ en un morphisme linéaire pour le plongement de Plücker.

Démonstration : Nous avons déjà vu que Φ est définie sur les points semi-stables. Elle est évidement $PO(q)$-invariante. L'image de $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, S_d))$ est contenue dans le fermé des formes quadratiques de rang inférieur ou égal à 6. Réciproquement, si w est une telle forme quadratique, son noyau $\mathrm{Ker}w$ est de codimension au plus 6. Soit $N = \check{S}_d/\mathrm{Ker}w$, c'est un espace vectoriel de dimension au plus 6 muni d'une forme quadratique non dégénérée. Si on se donne une isométrie injective i de N dans $\Lambda^2 \check{V}$, on construit grâce à la composée $\check{S}_d \longrightarrow N \xrightarrow{i} \Lambda^2 \check{V}$ la transposée d'un élément de la fibre.

Nous nous contentons pour le moment de vérifier que $\overline{\mathbf{R}_{d,0}}$ et $\overline{\mathbf{R}'_{d,0}}$ sont dans le lieu base de Φ. Nous vérifierons au moment de la compactification de $\mathbf{R}_d$ (remarque 9) que le lieu base de Φ sur $\overline{\mathbf{R}_d}$ est exactement donné par $\overline{\mathbf{R}_{d,0}} \cup \overline{\mathbf{R}'_{d,0}}$. L'application Φ n'est pas définie sur le lieu des points instables qui contient $\mathbf{R}_{d,0} \cup \mathbf{R}'_{d,0}$ (voir corollaire 1) et donc son adhérence.

Un élément de $\mathbf{R}_d$ est donné par une application linéaire ψ de $\Lambda^2 V$ dans S_d telle que le morphisme $\widetilde{\psi} : \Lambda^2 V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$ est surjectif et que la composée

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-d) \xrightarrow{{}^t\psi} \Lambda^2 \check{V} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{q} \Lambda^2 V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$$

est nulle. L'adhérence de $\mathbf{R}_d$ est donc donnée par la seconde condition. Par Φ on obtient alors le sous-schéma de $\overline{\mathbf{Q}}_6$ des formes quadratiques w qui vérifient que la composée

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-d) \longrightarrow S_d \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{w} S_d \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$$

est nulle. C'est exactement $\overline{\mathbf{q}}_6$. Les fibres de la restriction de Φ à $\overline{\mathbf{R}_d}$ sont les mêmes que celles de Φ. En effet, la condition "la courbe est dans $\mathbb{G}$" se traduit exactement par le fait que la quadrique image contient C_d ce qui se voit sur l'image.

Il nous reste à montrer que l'application induite sur $\mathbb{G}r_a$ (par invariance sous $PGL(V)$) est linéaire pour le plongement de Plücker. Si $\mathcal{V}$ est le sous-fibré tautologique et ψ_u est le morphisme

universel de $\Lambda^2\mathcal{V}$ dans $S_d\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{G}r_a}$, le morphisme Φ est défini de la façon suivante :

$$\Lambda^4\mathcal{V} \xrightarrow{q} S^2(\Lambda^2\mathcal{V}) \xrightarrow{s^2\psi_u} S^2S_d\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{G}r_a}$$

qui est bien linéaire pour le plongement de Plücker car $\Lambda^4\mathcal{V}$ est de degré -1.

Proposition 4. *Les fibres de Φ sont isomorphes à $PO(q)$ au dessus de $\mathbf{Q}_6$ et $PSO(q)$ au dessus de $\mathbf{Q}_5$. Dans ces deux cas la fibre est une orbite fermée sous $PO(q)$. Au dessus de $\mathbf{Q}_4$, les fibres de Φ ont deux composantes irréductibles de dimension $d+11$ qui se coupent en un fermé de dimension 14 qui est l'unique orbite fermée de cette fibre. Au dessus de $\mathbf{Q}_3$, elles sont irréductibles de dimension $d+11$ et contiennent une unique orbite fermée de dimension 12.*

L'image de $\mathbf{R}_d$ est exactement $\overline{\mathbf{q}}_6$.

Démonstration : Si G est un sous-groupe d'un groupe linéaire, on note PG le quotient du groupe G par les homothéties.

Soit w une forme quadratique de S_d. Si $\psi\in\Phi^{-1}(w)$, alors $\mathrm{Ker}{}^t\psi$ est inclus dans $\mathrm{Ker}w$. Notons $I(\psi)={}^t\psi(\mathrm{Ker}w)$ qui est un sous-espace vectoriel isotrope de Λ^2V et $N(w)$ l'espace $S_d/\mathrm{Ker}(w)$ (qui est muni d'une forme quadratique non dégénérée induite par w). La suite exacte :

$$0\longrightarrow I(\psi)\longrightarrow \mathrm{Im}{}^t\psi\longrightarrow N(w)\longrightarrow 0$$

impose que $I(\psi)$ est exactement le noyau de la restriction de q à $\mathrm{Im}({}^t\psi)$. Ainsi, $\mathrm{Im}({}^t\psi)$ est nécessairement contenu dans $I(\psi)^\perp$. Les rangs $r(w)$ et $r(\psi)$ de w et ψ et la dimension $i(\psi)$ de $I(\psi)$ vérifient les deux conditions suivantes :

$$r(\psi)=r(w)+i(\psi)\quad\text{et}\quad r(\psi)\leq 6-i(\psi)$$

Une fois fixés les entiers $r(\psi)$ et $i(\psi)$ vérifiant ces conditions, la fibre au dessus de w est donnée par les choix suivants : un sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}{}^t\psi$ de $\mathrm{Ker}w$ de codimension $i(\psi)$; un sous-espace $\mathrm{Im}({}^t\psi)$ de dimension $r(\psi)$ de $\Lambda^2V\check{}$ tel que la restriction de la forme quadratique q a pour noyau $I(\psi)$ un espace de dimension $i(\psi)$; une isométrie à homothétie près de $S_d/\mathrm{Ker}({}^t\psi)$ dans $\mathrm{Im}({}^t\psi)$. Le groupe $PO(q)$ agit transitivement sur les couples formés d'objets des deux derniers types.

Les valeurs de $r(w)$, $r(\psi)$ et $i(\psi)$ possibles sont alors (on se contente des cas $r(w)\geq 3$) :

– si $r(w)=6$, alors $r(\psi)=6$ et $i(\psi)=0$

– si $r(w)=5$, alors $r(\psi)=5$ et $i(\psi)=0$

– si $r(w)=4$, alors $r(\psi)=5$ et $i(\psi)=1$ ou $r(\psi)=4$ et $i(\psi)=0$

– si $r(w)=3$, alors $r(\psi)=4$ et $i(\psi)=1$ ou $r(\psi)=3$ et $i(\psi)=0$.

On commence par traiter les cas où $i(\psi)$ est nul. Dans ce cas, la fibre est donnée par un sous-espace $\mathrm{Im}({}^t\psi)$ de $\Lambda^2V\check{}$ de dimension $r(w)$ tel que la restriction de la forme quadratique q est non dégénérée et une isométrie de $S_d/\mathrm{Ker}(w)$ dans $\mathrm{Im}({}^t\psi)$. Le théorème de Witt nous permet de dire que tous les sous-espaces $\mathrm{Im}({}^t\psi)$ sont conjugués sous $PO(q)$, la fibre est ainsi une orbite sous ce groupe. Elle est toujours fermée. Le stabilisateur est alors $PO(\mathrm{Im}({}^t\psi)^\perp)$. Ceci décrit les cas de rang 5 et 6 et les fermés de dimensions 14 et 12 des cas de rang 4 et 3. Dans le cas où la forme quadratique est de rang 5, la fibre est isomorphe à $PSO(q)$ est c'est une orbite sous

$PO(q)$. Les actions de $PO(q)$ et de $PSO(q)$ pour les points de $\Phi^{-1}(\mathbf{Q}_5)$ sont les mêmes ce qui signifie que les surfaces de $\mathbf{R}_d^5$ sont autoduales. Ces courbes sont exactement les courbes tracées sur un hyperplan régulier (non tangent à la quadrique) de $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$. De même sur les deux fermés de dimensions 14 et 12, l'action de $PSO(q)$ est la même que celle de $PO(q)$ ainsi ces surfaces sont autoduales.

Si $i(\psi)$ vaut 1 (dans les cas $r(w) = 4$ ou $r(w) = 3$), la fibre est alors donnée par le choix d'un hyperplan de $\mathrm{Ker} w$ (c'est $\mathbb{P}(\mathrm{Ker} w)$ qui est de dimension $d-4$ ou $d-3$), le choix d'un sous-espace W de dimension 5 ou 4 de $\Lambda^2 V\check{}$ tel que la restriction de la forme quadratique q à W a un noyau de dimension 1 (ce choix correspond à $PO(q)/\mathrm{Stab}(W)$ qui est de dimension 4 ou 7) et le choix d'une isométrie à homothétie près (c'est $PO(W)$ qui est isomorphe à $PO(4) \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^4$ ou $PO(3) \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^3$ et est de dimension 11 ou 7). On peut remarquer qu'une fois le choix de l'élément de $\mathbb{P}(\mathrm{Ker} w)$ réalisé, la fibre est une orbite sous $PO(q)$. En effet, pour $r(w) = 4$, on a $PO(W) = \mathrm{Stab}(W)$ donc la fibre est isomorphe à $\mathbb{P}(\mathrm{Ker} w) \times PO(q)$ et a deux composantes connexes de dimension $d + 11$. Dans le cas $r(w) = 3$, on a l'égalité $\mathrm{Stab}(W) = PO(W) \times^{PO(W) \cap PO(W^\perp)} PO(W^\perp)$ où $PO(W^\perp) = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \{\mathrm{Id}, \sigma_H\}$ où H est un hyperplan contenant W et $PO(W) \cap PO(W^\perp) = \mathbb{C}^*$. On voit alors que la fibre est isomorphe à $\mathbb{P}(\mathrm{Ker} w) \times (PO(q)/\mathbb{C} \times \{\mathrm{Id}, \sigma_H\})$. Le sous-groupe $\mathbb{C} \times \{\mathrm{Id}, \sigma_H\}$ de $PO(W^\perp)$ est formé des éléments dont la restriction à $I(\psi)$ est l'identité. On voit ainsi que la fibre est isomorphe à $\mathbb{P}(\mathrm{Ker} w) \times PSO(q)/\mathbb{C}$ et qu'elle est irréductible de dimension $d + 11$.

Il reste à vérifier que les parties correspondant à $i(\psi)$ nul sont adhérentes à celles où $i(\psi) = 1$. Pour le voir, on choisit w de rang 4 ou 3 et $\psi \in \Phi^{-1}(w)$ tel que $i(\psi) = 0$ et on construit une déformation ψ_t d'élément tels que $i(\psi_t)$ est non nul qui tend vers ψ quand t tend vers 0. L'application ψ est donnée par une injection $\psi : N(w) \longrightarrow \Lambda^2 V$. Soit K un hyperplan de $\mathrm{Ker}(w)$ et $N = S_d/K$. Soit I le noyau de dimension 1 de $N \longrightarrow N(w)$, x un générateur de I et y un élément isotrope de $(\psi(N(w)))^\perp$, on définit l'application ψ_t sur $N = I \oplus N(w)$ par $\psi_t|_{N(w)} = \psi$ et $\psi_t(x) = ty$. Elle convient.

Dans le cas $r(w) = 3$ et $i(\psi) = 0$, le noyau $\mathrm{Ker}({}^t\psi) = \mathrm{Ker} w$ rencontre la courbe rationnelle normale C_d en $d - 2x$ points et se projette sur une conique avec multiplicité x. Ainsi, la courbe image est de degré $2x$. On est plus dans $\mathbf{R}_d$ sauf si d est pair et $x = [\frac{d}{2}]$. On verra au paragraphe 2.2 que les autres cas sont adhérents à $\mathbf{R}_d$. Si par contre $i(\psi) = 1$, alors on peut trouver un élément ψ qui nous donne une courbe de degré d. De même, au dessus des formes quadratiques de rang 4, 5 et 6, on peut trouver des éléments de $\mathbf{R}_d$. Pour ceci, il suffit de choisir un sous-espace $\mathrm{Ker}^t\psi$ de $\mathrm{Ker} w$ ne rencontrant pas C_d. On voit ainsi que $\mathbf{q}_i$ est l'image de $\mathbf{R}_d^i$.

Remarque 8. (i) Les surfaces de $\mathbf{R}_d^5$ correspondent aux courbes tracées sur un hyperplan non tangent à $\mathbb{G}$. Les surfaces de $\mathbf{R}_d^4$ correspondent aux courbes tracées sur un hyperplan tangent à $\mathbb{G}$ (cas général) ou à celles tracées sur un espace projectif de dimension 3 de $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ (fermé de codimension $d - 3$). Enfin, les surfaces de $\mathbf{R}_d^3$ correspondent aux courbes tracées sur un espace projectif de dimension 3 tangent à $\mathbb{G}$.

(ii) Les fibres de l'application de $\mathcal{M}(d)$ vers $\mathbb{P}(S^2 S_d)$ déduite de Φ sont formées par deux points au dessus de $\mathbf{q}_6$, un seul point au dessus de $\overline{\mathbf{q}_5}$.

Proposition 5. *Le morphisme Φ est le bon quotient de l'ouvert des points semi-stables de $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, S_d))$ par $PO(q)$. En particulier, le morphisme Φ resteint à $\mathbf{R}_d$ est un bon quotient pour l'action de $PO(q)$.*

Démonstration : Les points stables et semi-stables de $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, S_d))$ pour l'action de $PO(q)$ sont les mêmes que ceux pour l'action de $PGL(V)$. Ils sont décrits à la proposition 2. Ainsi l'ouvert de définition de Φ est exactement l'ouvert des points semi-stables. Par ailleurs Φ est $PO(q)$ invariant donc il se factorise par le bon quotient sur cet ouvert. Enfin, l'image de Φ est $\overline{\mathbf{Q}}_6$ qui est de cohen-macaulay et lisse en dehors de $\overline{\mathbf{Q}}_5$ (voir [ACGH]). Elle est donc régulière en codimension $d-5$ et donc en codimension 1 pour $d \geq 6$ (pour $d \leq 5$ elle est lisse). Le critère de Serre nous permet de dire que $\overline{\mathbf{Q}}_6$ est normale. Par ailleurs, la proposition 4 nous dit qu'il y a une unique orbite fermée dans chaque fibre de Φ. Ainsi le morphisme du quotient $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, S_d))^{ss}/PO(q)$ vers $\overline{\mathbf{Q}}_6$ est une bijection ensembliste. La normalité de $\overline{\mathbf{Q}}_6$ nous permet d'appliquer le théorème principal de Zariski pour affirmer que c'est un isomorphisme.

Corollaire 2. *La variété $\overline{\mathbf{q}}_6$ est normale régulière en codimension $d-5$.*

Démonstration : Nous savons que $\overline{\mathbf{q}}_6$ est l'image de Φ par $\mathbf{R}_d$. C'est donc le bon quotient d'une variété lisse d'où la normalité. Par ailleurs, sur l'ouvert $\mathbf{R}_d^6$, l'action est propre (les points sont stables) et libre (proposition 4). Ainsi la variété $\mathbf{q}_6$ est lisse et son complémentaire $\overline{\mathbf{q}}_5$ qui est donc exactement le lieu singulier de $\overline{\mathbf{q}}_6$ est en codimension $d-4$.

1.5 Comparaison des deux morphismes

Nous montrons dans ce paragraphe le théorème suivant :

Théorème 1. *Les morphismes Ψ et Φ sont égaux.*

Le principe de la démonstration est d'étudier les applications linéaires Φ_a et Ψ_a de $\mathbb{G}r_a$ dans $\mathbb{P}(S^{d-2}S_2)$. Elles se prolongent sur le plongement de Plücker en deux applications PGL_2-linéaires que nous notons encore Φ_a et Ψ_a de $\Lambda^4(S_a \oplus S_{d-a})$ dans $S^{d-2}S_2$. Il suffit de vérifier qu'elles correspondent au même quotient.

Nous étudions ces morphismes sur la strate minimale (celle des surfaces de type 1) et nous montrons qu'ils coïncident : les deux morphismes se factorisent par $\Lambda^2 S_{d-1} \otimes \Lambda^2 S_1$.

Nous montrons ensuite que si Ψ et Φ coincident sur cette strate alors ils sont égaux. Par par dualité, les morphismes Φ et Ψ sont égaux sur les surfaces dont la duale est de type 1. Par linéarité il suffit de montrer que la strate des surfaces dont la duale est de type 1 engendre tout l'espace vectoriel.

Lemme 3. *Les morphismes Ψ_1 et Φ_1 sont égaux, ils correspondent à la projection canonique de $\Lambda^4(S_1 \oplus S_{d-1})$ vers $\Lambda^2 S_{d-1} \otimes \Lambda^2 S_1$.*

Démonstration : Nous commençons par étudier Ψ_a : considérons le morphisme :

$$(S_{a-2} \oplus S_{d-a-2}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)} \xrightarrow{m} (S_a \oplus S_{d-a}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(2)$$

produit des deux multiplications. Le morphisme Ψ est donné par $H^0(\Lambda^{d-2}m)$. Il est donc défini par le produit tensoriel des deux applications SL_2-linéaires $\Lambda^{a-1}S_{a-2} \longrightarrow \Lambda^{a-1}S_a \otimes S^{a-1}S_2$ et $\Lambda^{d-a-1}S_{d-a-2} \longrightarrow \Lambda^{d-a-1}S_{d-a} \otimes S^{d-a-1}S_2$ Nous pouvons donc écrire Ψ_a comme étant l'application linéaire suivante (en tenant compte des isomorphismes entre $\Lambda^{k+1}S_n$ et $\Lambda^{n-k}\check{S}_n$) :

$$\Lambda^4(S_a \oplus S_{d-a}) \longrightarrow \Lambda^2 S_a \otimes \Lambda^2 S_{d-a} \longrightarrow S^{d-2}S_2$$

Étudions maintenant Φ_a : si on a une application φ de V vers $S_a \oplus S_{d-a}$ alors la flèche de $\Lambda^2 V$ vers S_d est donnée par l'application $\pi : \Lambda^2(S_a \oplus S_{d-a}) \longrightarrow S_a \otimes S_{d-a} \longrightarrow S_d$ composée avec $\Lambda^2\varphi$. Ainsi, le morphismeΦ_a est donné par

$$\Lambda^4(S_a \oplus S_{d-a}) \xrightarrow{{}^t\alpha} S^2(\Lambda^2(S_a \oplus S_{d-a})) \longrightarrow S^2(S_a \otimes S_{d-a}) \longrightarrow S^2 S_d$$

Mais le morphisme $S^2(S_a \otimes S_{d-a}) \longrightarrow \Lambda^4(S_a \oplus S_{d-a})$ se factorise par $\Lambda^2 S_a \otimes \Lambda^2 S_{d-a}$:

$$\Big(\sum_i (x_i \otimes y_i)\Big).\Big(\sum_j (x'_j \otimes y'_j)\Big) \mapsto -\sum_{i,j} (x_i \wedge x'_j, 0) \wedge (0, y_i \wedge y'_j)$$

Cette flèche de $\Lambda^4(S_a \oplus S_{d-a})$ dans $\Lambda^2 S_a \otimes \Lambda^2 S_{d-a}$ est la même que celle de Ψ_a. Il nous suffit de vérifier que les deux applications SL_2-linéaires de $\Lambda^2 S_a \otimes \Lambda^2 S_{d-a}$ dans $S^{d-2}S_2$ sont les mêmes.

Mais dans le cas $a = 1$, le terme $\Lambda^2 S_{d-1} \otimes \Lambda^2 S_1$ est isomorphe à $S^{d-2}S_2$ et à $S^2 S_{d-2}$. Ainsi dans ce cas les deux morphismes correspondent au quotient $\Lambda^4(S_1 \oplus S_{d-1}) \longrightarrow \Lambda^2 S_1 \otimes \Lambda^2 S_{d-1}$ et après identification de $S^{d-2}S_2$ et $S^2 S_{d-2}$ à $\Lambda^2 S_{d-1}$ on a l'égalité entre Ψ_1 et Φ_1.

Les morphismes Ψ et Φ étant invariants par dualité nous savons qu'ils coïncident sur le fermé de $\mathbb{G}r_{[\frac{d}{2}]}$ des surfaces de type général dont la duale est de type 1. Mais $\Psi_{[\frac{d}{2}]}$ et $\Phi_{[\frac{d}{2}]}$ sont linéaires pour le plongement de Plücker de $\mathbb{G}r_{[\frac{d}{2}]}$, il suffit donc de montrer que ce fermé n'est pas contenu dans un hyperplan et est réduit. La proposition suivante nous permet de conclure :

Proposition 6. *Les surfaces de type général dont la duale est de type* 1 *ne sont pas sur un hyperplan du plongement de Plücker de* $\mathbb{G}r_{[\frac{d}{2}]}$ *et forment un schéma réduit.*

Démonstration : Nous savons que cette sous-variété est déterminantielle (proposition 1). Nous pouvons donc calculer la résolution de son idéal grâce au complexe d'Eagon-Northcott associé. En effet, la variété est donnée par la non surjectivité de la flèche suivante sur $\mathbb{G}r_{[\frac{d}{2}]}$ (nous avons noté $\mathcal{V}$ le sous-fibré tautologique de $\mathbb{G}r_{[\frac{d}{2}]}$) :

$$\mathcal{V} \otimes S_{d-3} \longrightarrow (S_{[\frac{d}{2}]+d-3} \oplus S_{2d-[\frac{d}{2}]-3}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}r_{[\frac{d}{2}]}}$$

Notons L (resp. M) le faisceau de gauche (resp. droite) et l (resp. m) son rang. La résolution son idéal $\mathcal{I}$ est donnée par (voir par exemple [GP]) :

$$0 \longrightarrow \Lambda^m \check{M} \otimes \Lambda^l L \otimes S^{l-m}(\check{M}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Lambda^m \check{M} \otimes \Lambda^m L \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow 0$$

Il nous reste à calculer les sections globales de $\mathcal{I}(1)$ donc la cohomologie des termes de ce complexe. Pour voir que $H^0\mathcal{I}(1)$ est nul il nous suffit de montrer que les groupes de cohomologie $H^{l-m-p}(\Lambda^m \check{M} \otimes \Lambda^{l-p} L \otimes S^{l-m-p}(\check{M})(1))$ sont nuls. Or seul le terme L est non trivial, il suffit donc

de montrer que les groupes $H^{l-m-p}(\Lambda^{l-p}L(1))$ sont nuls. Nous pouvons calculer ce faisceau grâce aux foncteurs de Schur ([FH]) :

$$\Lambda^{l-p}L = \bigoplus_{\lambda}(S_\lambda\mathcal{V}\otimes S_{\lambda'}S_{d-3})$$

il reste donc à calculer la cohomologie de $S_\lambda\mathcal{V}$ pour les partitions qui apparaissent et on trouve le résultat d'annulation (la cohomologie des foncteurs de Schur des fibrés tautologiques est connue, voir [DE]). Ici les $S_\lambda\mathcal{V}$ sont à cohomologie complètement nulle.

Nous devons maintenant éliminer le cas où les courbes de type 1 seraient sur un hyperplan épaissi. Ce n'est pas le cas : les surfaces de $\mathbb{G}r_{[\frac{d}{2}]}$ dont la duale est de type 1 est l'image de l'incidence entre $\mathbb{G}r_1$ et $\mathbb{G}r_{[\frac{d}{2}]}$ donnée par la dualité. Elle est donc réduite.

Théorème 2. *Le morphisme Ψ est génériquement injectif modulo isomorphisme et dualité.*

Démonstration : Il suffit de combiner le théorème 1 et la proposition 4.

2 Applications

Nous allons maintenant utiliser le résultat du théorème 1 pour étudier l'image de Ψ et celle de certaines sous-variétés remarquables de $\mathbf{R}_d$. Nous étudierons également la compatification de $\mathbf{R}_d$ dans $\mathbb{P}\mathrm{Hom}(\Lambda^2V, S_d)$ ainsi que l'image du bord par Ψ. Nous donnerons enfin quelques applications géométriques, en particulier l'exemple des surfaces de degré 5 nous permettra de décrire les positions d'une cubique plane par rapport à une conique.

2.1 Étude des $\mathbf{R}_d^k$

Nous montrons dans ce paragraphe le théorème suivant :

Théorème 3. *Les variétés $\mathbf{R}_d$ et $\mathbf{R}_d^5$ sont irréductibles et lisses de dimensions $4d+4$ et $3d+8$. La variété $\mathbf{R}_d^4$ a $d-1$ composantes irréductibles de dimension $3d+7$. La variété $\mathbf{R}_d^3$ a $[\frac{d}{2}]$ composantes irréductibles de dimension $2d+9$.*

Proposition 7. *Les variétés $\mathbf{R}_d$ et $\mathbf{R}_d^5$ sont irréductibles et lisses de dimensions $4d+4$ et $3d+8$.*

Démonstration : La variété $\mathbf{R}_d$ est un ouvert du schéma des morphismes de degré d de $\mathbb{P}^1$ dans la grassmannienne $\mathbb{G}$. Les résultats de [P2] nous permettent de conclure à la lissité, l'irréductibilité et la dimension de cette variété.

Nous avons un morphisme propre de la variété $\mathbf{R}_d^5$ vers les hyperplans de $\mathbb{P}(\Lambda^2V)$ non tangents à $\mathbb{G}$: à $f \in \mathbf{R}_d^5$ on associe l'hyperplan sur lequel l'image est tracée (il est unique sinon par Φ on aurait une quadrique de rang au plus 4). La fibre de ce morphisme est le schéma $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, Q_3)$ des morphismes de degré d de $\mathbb{P}^1$ dans Q_3 "la" quadrique non singulière de $\mathbb{P}^4$ (cette quadrique est la quadrique de rang 5 découpée dans $\mathbb{G}$ par l'hyperplan, elle est isomorphe à Q_3). Les résultats de [P2] nous permettent d'affirmer que la fibre est irréductible, lisse de dimension constante égale à $3d+3$ d'où le résultat.

La variété $\mathbf{R}_d^4$

Nous allons maintenant décrire les composantes irréductibles de $\mathbf{R}_d^4$. Nous avons vu à la proposition 4 qu'un ouvert dense $\mathbf{U}_4$ de $\mathbf{R}_d^4$ est formé des éléments f tels que la courbe $f(\mathbb{P}^1)$ est contenue dans un unique hyperplan tangent à $\mathbb{G}$ (cas $i(f)=1$). Il nous suffit donc de déterminer les composantes irréductibles de l'ouvert $\mathbf{U}_4$.

Nous avons alors un morphisme propre $\Upsilon_4 : \mathbf{U}_4 \longrightarrow \mathbb{G}$ qui a f associe le point de contact de l'unique hyperplan tangent à $\mathbb{G}$ contenant $f(\mathbb{P}^1)$. Il s'agit maintenant d'étudier la fibre de Υ_4. Cette fibre au dessus de $L_0 \in \mathbb{G}$ est isomorphe à $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathfrak{C}_{L_0})$ où $\mathfrak{C}_{L_0}$ est le cône de $\mathbb{G}$ formé par les droites qui rencontrent L_0.

Notons $\widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0}$ la variété : $\{(P,L,H) \in \mathbb{P}(V) \times \mathbb{G} \times \mathbb{P}(\check{V}) \ / \ P \in L_0 \subset H \quad \text{et} \quad P \in L \subset H\}$, c'est l'éclatemement π de $\mathfrak{C}_{L_0}$ au sommet du cône. Nous avons une projection p de $\widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0}$ vers la variété Q_{L_0} suivante : $\{(P,H) \in \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(\check{V}) \ / \ P \in L_0 \subset H\}$. Cette variété est une quadrique isomorphe à $L_0 \times \check{L}_0$.

Il est facile de vérifier que $\widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0}$ est la fibration en droites projectives au dessus de Q_{L_0} associée au faisceau $\mathcal{O}_{L_0 \times \check{L}_0}(-1,0) \oplus \mathcal{O}_{L_0 \times \check{L}_0}(0,1)$. Le groupe de Picard de $\widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0}$ est donc $\mathbb{Z}^3$ (nous prendrons pour base des cycles les degrés sur Q_{L_0} et le degré relatif pour p).

Lemme 4. *Pour tout* $\gamma = (a,b,c) \in \mathbb{N}^3$*, le schéma* $\mathrm{Mor}_\gamma(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0})$ *est irréductible et lisse de dimension* $2a+2b+c+3$.

Démonstration : Le théorème principal de [P2] nous permet de dire que le schéma des morphismes $\mathrm{Mor}_{(a,b)}(\mathbb{P}^1, Q_{L_0})$ est irréductible et lisse de dimension $2(a+b+1)$. Par ailleurs, la proposition 4 de [P2] nous permet de dire que comme le degré relatif est positif, alors $\mathrm{Mor}_\gamma(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0})$ est irréductible et lisse de dimension $2(a+b+1)+c+1$.

L'éclatement π définit un morphisme $\pi : \mathrm{Mor}_\gamma(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0}) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\pi_*\gamma}(\mathbb{P}^1, \mathfrak{C}_{L_0})$. De plus si f est un élément de $\mathrm{Mor}_{(a,b,c)}(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0})$ alors $f(\mathbb{P}^1)$ rencontre le diviseur exceptionnel en $\frac{1}{2}(c-(a+b))$ points, le degré de son image dans $\mathfrak{C}_{L_0}$ est donc $\frac{1}{2}(a+b+c)$. Ainsi $\pi(f)$ est de degré d si et seulement si $c = 2d-(a+b)$.

L'image de $\mathrm{Mor}_{(a,b,2d-(a+b))}(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0})$ dans $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathfrak{C}_{L_0})$ est contenu dans l'ensemble des morphismes dont l'image passe $d-(a+b)$ fois par le sommet du cône. Si $d < a+b$ ceci impose que l'image du morphisme est contenu dans le diviseur exceptionnel, il se contracte donc sur le sommet par π. Nous supposerons desormais que $d \geq a+b$. Réciproquement, si on a un morphisme de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathfrak{C}_{L_0}$ qui passe $d-(a+b)$ fois par le diviseur exceptionnel, sa transformée stricte dans $\widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0}$ est dans le schéma $\mathrm{Mor}_{(a,b,2d-(a+b))}(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0})$ (ou $\mathrm{Mor}_{(b,a,2d-(a+b))}(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0})$) et on retrouve le morphisme de départ par projection par π. Nous avons donc des immersions $\pi : \mathrm{Mor}_{(a,b,2d-(a+b))}(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0}) \longrightarrow \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathfrak{C}_{L_0})$.

Proposition 8. *Pour a fixé, les variétés* $\pi(\mathrm{Mor}_{(a,b,2d-(a+b))}(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0}))$ *avec* $d > a+b$ *sont dans l'adhérence de* $\pi(\mathrm{Mor}_{(a,d-a,d)}(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0}))$.

Démonstration : Notons W l'espace vectoriel $H^0\mathcal{O}_{L_0}(1)$, c'est un quotient de rang 2 de V. Notons N_W le noyau de la surjection de V dans W. Si $f(\mathbb{P}^1)$ est dans le cône $\mathfrak{C}_{L_0}$, alors l'image de la flèche $N_W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow f^*Q$ est de rang 1. De plus le conoyau de cette flèche est de rang 2 aux points de $\mathbb{P}^1$ qui s'envoient sur le sommet du cône et de rang 1 ailleurs.

Considérons donc un morphisme $f \in \Upsilon_4^{-1}(L_0)$ tel que le morphisme $N_W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow f^*Q$ ait pour conoyau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_D$ où D est un diviseur de degré x. L'image de $N_W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ dans f^*Q est donc $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-(a+x))$ et le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_D$ est le conoyau de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-(a+x)) \xrightarrow{r_0} W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$.

En considérant les flèches duales (correspondant à la surface duale), nous avons un morphisme de $\check{V} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ dans $f^*\check{K}$. La flèche ${}^t r_0$ de $\check{W} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a+x)$ a pour image $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)$ et conoyau $\mathcal{O}_D$. Le morphisme $\check{W} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow f^*\check{K}$ se factorise par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a+x)$ et a pour conoyau le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-(a+x)) \oplus \mathcal{O}_D$. Ainsi, il suffit de se donner une famille r_λ de flèches de $\check{W} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a+x)$ sujective au point générique et égale à ${}^t r_0$ au point spécial pour constuire une famille de morphismes dont l'image ne passe pas par le sommet au point générique et qui vaut f au point spécial.

Corollaire 3. *Les composantes irréductibles de* $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathfrak{C}_{L_0})$ *sont les adhérences des images* $\pi(\mathrm{Mor}_{(a,d-a,d)}(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0}))$ *pour* $0 \leq a \leq d$. *Elles sont toutes de dimension* $3d+3$.

Notons $\mathbf{R}_d^4(a)$ le fermé de $\mathbf{U}_4$ des morphismes f qui sont dans la composante de $\Upsilon_4^{-1}(\Upsilon_4(f))$ contenant $\pi(\mathrm{Mor}_{(a,d-a,d)}(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathfrak{C}}_{\Upsilon_4(f)}))$.

Corollaire 4. *Les variétés* $\mathbf{R}_d^4(a)$ *pour* $1 \leq a \leq d-1$ *sont les composantes irréductibles de* $\mathbf{R}_d^4$. *Elles sont de dimension* $3d+7$. *Les composantes* $\mathbf{R}_d^4(a)$ *et* $\mathbf{R}_d^4(d-a)$ *sont duales l'une de l'autre.*

Démonstration : Les variétés $\mathbf{R}_d^4(0)$ et $\mathbf{R}_d^4(d)$ ne sont pas dans $\mathbf{R}_d^4$ (mais dans son adhérence) car dans ce cas la courbe est tracée sur un (β)-plan ou un (α)-plan respectivement. Elle n'est donc pas dans $\mathbf{R}_d$. Les variétés $\mathbf{R}_d^4(a)$ ont pour ouvert dense la famille des $\pi_L(\mathrm{Mor}_{(a,d-a,d)}(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathfrak{C}}_L))$ au dessus de $\mathbb{G}$. Celle-ci est irréductible de dimension $3d+7$. Les variétés $\mathbf{R}_d^4(a)$ pour $1 \leq a \leq d-1$ sont toutes distinctes, l'image d'un morphisme général est donné par une courbe tracée sur un hyperplan tangent à $\mathbb{G}$ qui rencontre un (α)-plan et un (β)-plan (contenus dans cet hyperplan) en a points et en $d-a$ points.

Remarquons que la dualité échange les (α)-plans et les (β)-plans ce qui montre que les composantes $\mathbf{R}_d^4(a)$ et $\mathbf{R}_d^4(d-a)$ sont duales l'une de l'autre. Remarquons enfin que les strates $\mathbf{R}_{d,1}$ et $\mathbf{R}'_{d,1}$ sont $\mathbf{R}_d^4(1)$ et $\mathbf{R}_d^4(d-1)$.

La variété $\mathbf{R}_d^3$

Nous avons vu à la proposition 4 qu'un ouvert dense $\mathbf{U}_3$ de $\mathbf{R}_d^3$ est formé des éléments f de $\mathbf{R}_d^3$ tels que la courbe $f(\mathbb{P}^1)$ est contenue dans un unique espace linéaire de codimension 2 tangent à $\mathbb{G}$ (cas $i(f)=1$). Il nous suffit donc de déterminer les composantes irréductibles de l'ouvert $\mathbf{U}_3$.

Nous avons alors un morphisme propre $\Upsilon_3 : \mathbf{U}_3 \longrightarrow \check{T}_{\mathbb{G}}$ qui a f associe l'unique espace linéaire de codimension 2 tangent à $\mathbb{G}$ et contenant $f(\mathbb{P}^1)$ (l'espace $\check{T}_{\mathbb{G}}$ est isomorphes aux couples (x, W) où $x \in \mathbb{G}$ et W est une sous-variété linéaire de dimension 3 de $T_x\mathbb{G}$). Il s'agit maintenant d'étudier la fibre de Υ_3. Cette fibre au dessus de $L_0 \in \mathbb{G}$ est isomorphe à $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, S_{L_0})$ où S_{L_0} est le cône de $\mathbb{G}$ découpé par le sous-espace linéaire de codimension 2.

Notons $\pi : \widetilde{S}_{L_0} \longrightarrow S_{L_0}$ l'éclatemement de S_{L_0} au sommet du cône. Nous avons une projection p de $\widetilde{S}_{L_0}$ vers la droite L_0. Il est facile de vérifier que $\widetilde{S}_{L_0}$ est la fibration en droites projectives

au dessus de L_0 associée au faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$. Le groupe de Picard de $\widetilde{S}_{L_0}$ est donc $\mathbb{Z}^2$ (nous prendrons pour base des cycles le degré sur L_0 et le degré relatif pour p).

Lemme 5. *Pour tout $\gamma = (a, b) \in \mathbb{N}^2$, si $b \geq 2a$, le schéma $\mathrm{Mor}_\gamma(\mathbb{P}^1, \widetilde{S}_{L_0})$ est irréductible lisse de dimension $2a + b + 2$, sinon il est vide.*

Démonstration : Le théorème principal de [P2] nous permet de dire que le schéma des morphismes $\mathrm{Mor}_a(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1)$ est irréductible et lisse de dimension $2a + 1$. Par ailleurs, la proposition 4 de [P2] nous permet de dire que comme le degré relatif est positif, alors si $b \geq 2a$, le schéma $\mathrm{Mor}_\gamma(\mathbb{P}^1, \widetilde{S}_{L_0})$ est irréductible et lisse de dimension $2a + 1 + b + 1$ et qu'il est vide sinon.

L'éclatement π définit un morphisme $\pi : \mathrm{Mor}_\gamma(\mathbb{P}^1, \widetilde{S}_{L_0}) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\pi_*\gamma}(\mathbb{P}^1, L_0)$. De plus si f est un élément de $\mathrm{Mor}_{(a,b)}(\mathbb{P}^1, \widetilde{S}_{L_0})$ alors $f(\mathbb{P}^1)$ rencontre le diviseur exceptionnel en $\frac{1}{2}b - a$ points, le degré de son image dans S_{L_0} est donc $\frac{1}{2}b + a$. Ainsi $\pi(f)$ est de degré d si et seulement si $b = 2(d - a)$. Nous supposons maintenant $b \geq 2a$.

Proposition 9. *La variété $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, S_{L_0})$ a $[\frac{d}{2}] + 1$ composantes irréductibles toutes de dimension $2d + 2$ décrites pas les images par π des $\mathrm{Mor}_{(a,2(d-a))}(\mathbb{P}^1, \widetilde{S}_{L_0})$ pour $0 \leq a \leq [\frac{d}{2}]$.*

Démonstration : Comme dans le cas de $\mathbf{R}_d^4$, les morphismes de $\mathrm{Mor}_{(a,b)}(\mathbb{P}^1, \widetilde{S}_{L_0})$ dans le schéma $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, S_{L_0})$ sont des immersions dès que $[\frac{d}{2}] \geq a$. Par ailleurs $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, S_{L_0})$ est recouvert par ces images (il suffit de regarder la transformée stricte). Comme toutes ces variétés sont irréductibles de même dimension elles forment les composantes irréductibles de $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, S_{L_0})$.

Notons $\mathbf{R}_d^3(a)$ le fermé de $\mathbf{U}_3$ des morphismes f qui sont dans la composante irréductible $\pi(\mathrm{Mor}_{(a,2(d-a))}(\mathbb{P}^1, \widetilde{S}_{\Upsilon_3(f)}))$ de $\Upsilon_3^{-1}(\Upsilon_3(f))$.

Corollaire 5. *Les variétés $\mathbf{R}_d^3(a)$ pour $1 \leq a \leq [\frac{d}{2}]$ sont les composantes irréductibles de $\mathbf{R}_d^3$. Elles sont de dimension $2d + 9$.*

Démonstration : La variété $\mathbf{R}_d^3(0)$ n'est pas dans $\mathbf{R}_d^3$ (mais dans son adhérence) car un tel morphisme f aurait pour image une droite contenue dans $\mathbb{G}$, la surface serait alors un cône (et sa duale aussi). Les composantes sont évidement autoduales.

2.2 Compactification de $\mathbf{R}_d$

Nous étudions dans ce paragraphe la fermeture $\overline{\mathbf{R}_d}$ de $\mathbf{R}_d$ dans $\mathbb{P}\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, S_d)$.

Proposition 10. *Le bord de $\mathbf{R}_d$ est formé de variétés isomorphes à $\mathbf{R}_{d'} \times \mathbb{P}(S_{d-d'})$ pour tout d' entier strictement inférieur à d et de $\overline{\mathbf{R}_{d,0}} \cup \overline{\mathbf{R}'_{d,0}}$.*

Démonstration : Nous avons vu au lemme 2 qu'un élément de $\mathbf{R}_d$ est donné par une application linéaire ψ de $\Lambda^2 V$ dans S_d telle que le morphisme $\widetilde{\psi} : \Lambda^2 V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$ est surjectif et que la composée

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-d) \xrightarrow{{}^t\psi} \Lambda^2 \check{V} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{q} \Lambda^2 V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$$

est nulle (condition notée $(*)$).

Un élément ψ est donc dans le bord de $\mathbf{R}_d$ si il vérifie la condition $(*)$ (qui est fermée) et si la flèche $\widetilde{\psi}$ associée sur les faisceaux n'est plus surjective. L'élément ψ étant non nul, l'image de $\widetilde{\psi}$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$ est un faisceau sans torsion de rang 1. C'est donc $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d')$ avec $0 \le d' < d$. La donnée de ψ est équivalente à celle d'une surjection de $\Lambda^2 V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d')$ et d'une flèche de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d')$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$. Ceci correspond au choix d'un élément de $\mathbf{R}_{d'}$ (ou de $\mathbf{R}_{d',0} \cup \mathbf{R}'_{d',0}$) et d'un élément de $\mathbb{P}(S_{d-d'})$. Le cas de $\mathbf{R}_{d',0} \cup \mathbf{R}'_{d',0}$ est adhérent à $\mathbf{R}_{d,0} \cup \mathbf{R}'_{d,0}$ d'où le résultat.

Remarque 9. (I) Nous pouvons maintenant compléter la preuve du fait (lemme 2) que la restriction du morphisme Φ à $\overline{\mathbf{R}_d}$ est définie en dehors de $\overline{\mathbf{R}_{d,0}} \cup \overline{\mathbf{R}'_{d,0}}$. En effet, nous avons vu que Φ n'est pas défini sur ce fermé et sur le complémentaire c'est à dire sur $\mathbf{R}_d$ et sur les composantes $\mathbf{R}_{d'} \times \mathbb{P}(S_{d-d'})$ du bord le morphisme Φ est défini (voir lemme 6 pour l'image du bord).

(II) Notons $i(d,d')$ l'inclusion de $\mathbf{R}_{d'} \times \mathbb{P}(S_{d-d'})$ dans $\overline{\mathbf{R}_d}$. Soient d' et d'' deux entiers tels que $0 \le d'' < d' < d$. La composée de $i(d',d'') \times \mathrm{Id}_{\mathbb{P}(S_{d-d'})}$ et de $i(d,d')$ qui va de $\mathbf{R}_{d''} \times \mathbb{P}(S_{d'-d''}) \times \mathbb{P}(S_{d-d'})$ dans $\overline{\mathbf{R}_{d'}} \times \mathbb{P}(S_{d-d'})$ puis dans $\overline{\mathbf{R}_d}$ est $i(d,d'')$ où on a identifié $\mathbb{P}(S_{d'-d''}) \times \mathbb{P}(S_{d-d'})$ avec $\mathbb{P}(S_{d-d''})$ grâce à la multiplication $S_{d'-d''} \otimes S_{d-d'} \longrightarrow S_{d-d''}$.

Corollaire 6. *Le bord de* $\mathbf{R}_d$ *a trois composantes irréductibles : les deux fermés* $\overline{\mathbf{R}_{d,0}}$ *et* $\overline{\mathbf{R}_{d,0}}$ *et la variété* $\overline{\mathbf{R}_{d-1}} \times \mathbb{P}(S_1)$.

Lemme 6. *L'image de* $\mathbf{R}_{d'} \times \mathbb{P}(S_{d-d'})$ *par* Φ *est la variété des quadriques contenant la courbe rationnelle normale* C_d *et dont le noyau (en tant que forme quadratique) rencontre* C_d *selon les* $d - d'$ *points définis par l'élément de* $\mathbb{P}(S_{d-d'})$.

Démonstration : Soient $d - d'$ points de C_d définis par un élément ξ de $\mathbb{P}(S_{d-d'})$. L'espace linéaire H_ξ engendré par ces points est donné par le conoyau de $S_{d'} \xrightarrow{\xi} S_d$. Soit ψ un morphisme de $\Lambda^2 V$ dans S_d, le noyau de la forme quadratique $\Phi(\psi)$ contient le sous-espace linéaire N donné par le conoyau de ψ.

Si le morphisme ψ se factorise par un élément $\xi \in \mathbb{P}(S_{d-d'})$, alors on a une surjection $N \longrightarrow H_\xi$ ce qui impose que le noyau de la flèche contient le sous-espace linéaire H_ξ et donc que le noyau de $\Phi(\psi)$ rencontre C_d selon les $d - d'$ points définis par ξ.

Réciproquement, si on a une forme quadratique w qui contient C_d et dont le noyau rencontre C_d selon les $d - d'$ points définis par $\xi \in \mathbb{P}(S_{d-d'})$, alors l'image de C_d par la projection par rapport à H_ξ est la courbe rationnelle normale $C_{d'}$ de $\mathbb{P}(S_{d'})$. Son image par la projection par rapport à $\mathrm{Ker} w / H_\xi$ est alors une courbe rationnelle de degré d' de $S_d/\mathrm{Ker} w$. En prenant une isométrie de $S_d/\mathrm{Ker} w$ dans $\Lambda^2 V$, on a un élément de $\mathbf{R}_{d'}$. Ainsi w est dans l'image de $\mathbf{R}_{d'} \times \mathbb{P}(S_{d-d'})$.

2.3 Degré des images

Nous étudions maintenant les images par Ψ des variétés $\mathbf{R}_d^k$ ainsi que celle du bord de $\mathbf{R}_d$. Nous donnons notamment le degré de ces variétés et nous décrirons la courbe générale de l'image des composantes de $\mathbf{R}_d^4$, $\mathbf{R}_d^3$ et du bord au prochain paragraphe.

Pour calculer le degré de l'image, nous utilisons le théorème 1. Nous savons (proposition 2) que l'image par Φ et donc par Ψ de $\mathbf{R}_d$ est $\overline{\mathbf{q}}_6$. Ceci impose que l'image de $\mathbf{R}_d^k$ est exactement

$\mathbf{q}_k$. Nous vérifions que pour $3 \leq k \leq 6$ les variétés déterminantielles $\mathbf{q}_k$ ont les dimensions "attendues". Nous pouvons ainsi grâce aux resultats de [HT] calculer leur degré.

Proposition 11. *Les variétés $\mathbf{q}_k$ pour $3 \leq k \leq 6$ sont équidimensionnelles de dimensions respectives $(k-2)d - 1 - \frac{1}{2}(k-1)(k-2)$.*

Démonstration : Nous avons montré que les variétés $\mathbf{R}_d^3$, $\mathbf{R}_d^4$, $\mathbf{R}_d^5$ et $\mathbf{R}_d^6$ sont équidimensionnelles de dimensions $2d+9$, $3d+7$, $3d+8$ et $4d+4$. Les fibres au dessus de $\mathbf{q}_3$, $\mathbf{q}_4$, $\mathbf{q}_5$ et $\mathbf{q}_6$ étant équidimensionnelles de dimensions $d+11$, $d+11$, 15 et 15 (proposition 4), les variétés $\mathbf{q}_k$ pour $3 \leq k \leq 6$ sont donc équidimensionnelles de la dimension voulue.

Nous pouvons maintenant montrer le théorème suivant :

Théorème 4. *L'image par Ψ de la variété $\mathbf{R}_d$ (resp. de $\mathbf{R}_d^5$) est un localement fermé irréductible de dimension $4d-11$ (resp. $3d-7$) et de degré $i(d)$ (resp. $j(d)$) qui est PGL_2-invariant.*

L'image par Ψ de la variété $\mathbf{R}_d^4$ (resp. $\mathbf{R}_d^3$) est de degré $k(d)$ (resp. $p(d)$). Elle a $[\frac{d}{2}]$ composantes irréductibles qui sont des localement fermés (resp. fermés) de dimension $2d-4$ (resp. $d-2$) invariants sous PGL_2.

Si $d \geq 5$, l'image du bord de $\mathbf{R}_d$ privé de $\overline{\mathbf{R}_{d,0}}$ et $\overline{\mathbf{R}'_{d,0}}$ est irréductible de dimension $4d-14$ et de degré $2(4d-14)i(d-1)$.

Les degrés sont donnés par :

$$i(d) = \prod_{k=0}^{d-6} \frac{\binom{d+1+k}{d-5-k}}{\binom{2k+1}{k}} \quad j(d) = \prod_{k=0}^{d-5} \frac{\binom{d+1+k}{d-4-k}}{\binom{2k+1}{k}} \quad k(d) = \prod_{k=0}^{d-4} \frac{\binom{d+1+k}{d-3-k}}{\binom{2k+1}{k}} \quad p(d) = \prod_{k=0}^{d-3} \frac{\binom{d+1+k}{d-2-k}}{\binom{2k+1}{k}}$$

Démonstration : Les résultats de J. Harris et L.W. Tu [HT], que l'on peut appliquer aux variétés déterminantielles $\mathbf{q}_k$, nous permettent de calculer les degrés.

Le résultat sur $\mathbf{R}_d$ et $\mathbf{R}_d^5$ découle directement de la proposition 7 et de la dimension des fibres (proposition 4).

Les $d-1$ composantes irréductibles $\mathbf{R}_d^4(a)$ pour $1 \leq a \leq d-1$ de $\mathbf{R}_d^4$ sont telles que $\mathbf{R}_d^4(a)$ et $\mathbf{R}_d^4(d-a)$ sont en dualité (corollaire 4). Leurs images sont donc les mêmes ce qui donne $[\frac{d}{2}]$ fermés irréductibles de $\Psi(\mathbf{R}_d^4)$. Nous montrerons à la proposition 12 que ces fermés sont distincts et nous les décrirons.

Nous avons vu que l'image de $\mathbf{R}_d^3$ est $\mathbf{q}_3$ qui est fermé (car $\mathbf{q}_2$ est vide) de dimension $d-2$ (proposition 11). Chacune des composantes irréductibles de $\mathbf{R}_d^3$ donnera un fermé irréductible de $\mathbf{q}_3$. Nous montrerons à la proposition 12 que ces fermés sont distincts et nous les décrirons.

Le bord de $\mathbf{R}_d$ privé de $\overline{\mathbf{R}_{d,0}}$ et $\overline{\mathbf{R}'_{d,0}}$ est $\overline{\mathbf{R}_{d-1}} \times \mathbb{P}(S_1)$ (corollaire 6). Il est donc irréductible de dimension $4d+1$. D'après la proposition 4, son image est de dimension $4d-14$. Nous décrirons son image au lemme 7 et nous donnerons son degré.

2.4 Description géométrique de quelques images

Nous déterminons géométriquement les courbes de l'image du bord, de $\Psi(\mathbf{R}_d^4)$ et de $\Psi(\mathbf{R}_d^3)$.

Remarque 10. Nous pouvons décrire géométriquement la correspondance entre les formes quadratiques de S_d contenant C_d et les courbes de degré $d-2$ de $\mathbb{P}(S_2)$. Soit Q une forme quadratique de S_d contenant C_d et définissons la courbe de S^2C_d suivante :

$$C(Q) = \{(p,q) \in S^2C_d \ / \text{ la droite } (pq) \text{ est isotrope pour } Q\}$$

La variété S^2C_d est canoniquement isomorphe à $S^2\mathbb{P}^1$ et le morphisme :

$$\begin{aligned} C : \mathbb{P}(S^2S_{d-2}) &\longrightarrow \mathbb{P}(S^{d-2}S_2) \\ Q &\mapsto C(Q) \end{aligned}$$

est la description géométrique de la loi de réciprocité de Hermite. Ainsi si nous considérons Φ comme à valeur dans $\mathbb{P}(S^2S_{d-2})$, nous avons $\Psi = C \circ \Phi$. En effet, soit ψ une projection de $\mathbb{P}(S_d)$ dans $\mathbb{P}(\Lambda^2V)$. Les droites L_p et L_q correspondant aux images de p et q se coupent si et seulement si la droite $(\psi(p)\psi(q))$ est contenue dans $\mathbb{G}$ ce qui signifie exactement que (pq) est isotrope pour Q.

Lemme 7. *L'image de $\mathbf{R}_{d'} \times \mathbb{P}(S_{d-d'})$ est formée des courbes réunion d'une courbe de degré $d'-2$ de $\Psi(\mathbf{R}_{d'})$ et des $d-d'$ tangentes à la conique C_0 définies par l'élément de $\mathbb{P}(S_{d-d'})$. Elle est de degré $2^{d-d'}\binom{d+3d'-11}{d-d'}i(d')$ pour $d \geq 5$.*

Démonstration : Si ψ est dans le bord de $\mathbf{R}_d$, disons que $\psi = (\psi', \xi) \in \mathbf{R}_{d'} \times \mathbb{P}(S_{d-d'})$, alors ψ se factorise par ξ ce qui impose (voir le lemme 6) que le noyau de la forme quadratique $Q = \Phi(\psi)$ rencontre C_d selon les $d-d'$ points définis par ξ. Si p est un tel point, alors pour tout $q \in C_d$ la droite (pq) est isotrope pour Q. Ainsi les paires (p,q) pour tout $q \in C_d$ sont dans $C(Q)$. Le lieu singulier abstrait contient donc les tangentes à la conique canonique définies par ξ. La composante restante est définie par ψ' et est un élément de $\Psi(\mathbf{R}_{d'})$.

Réciproquement, si la courbe $C(Q)$ contient les droites tangentes à C_0 définies par un élément $\xi \in \mathbb{P}(S_{d-d'})$, alors pour tout point p défini par ξ, nous savons d'après la remarque précédente que pour tout $q \in C_d$ la droite (pq) est isotrope pour Q. Ceci est équivalent à dire que p est dans le noyau de Q. Il suffit alors de prendre une isométrie de S_d/KerQ dans Λ^2V pour trouver un élément de $\mathbf{R}_{d'} \times \mathbb{P}(S_{d-d'})$ qui s'envoie sur la courbe $C(Q)$.

La fibre des courbes contenant une droite tangente n'est pas contenue dans le bord de $\mathbf{R}_d$. Par exemple si f est un élément de $\mathbf{U}_4$ tel que $f(\mathbb{P}^1)$ rencontre le sommet du cône $\mathfrak{C}_{\Upsilon_4(f)}$ alors son lieu singulier abstrait contient une droite tangente à C_0.

Pour calculer son degré, il suffit de calculer le nombre de courbes de ce fermé qui passent par $d+3d'-11$ points en position générale. Mais on connait le degré de $\Psi(\mathbf{R}_{d'})$ dans la variété des courbes de degré $d'-2$, c'est $i(d')$ (il représente le nombre de courbes de ce type passant par $4d'-11$ points). Pour déterminer une courbe passant par $3d'+d-11$ points il suffit d'en choisir $d-d'$ ($\binom{d+3d'-11}{d-d'}$ possibilités) qui nous donnent les tangentes ($2^{d-d'}$ possibilités) et les $4d'-11$ autres nous définissent $i(d')$ courbes de degré $d'-2$ dans l'ensemble voulu. Le degré recherché est donc $2^{d-d'}\binom{d+3d'-11}{d-d'}i(d')$.

Si $d=4$, la variété $\mathbf{R}_3$ ne vérifie plus les conditions précédentes. La dimension du bord de $\mathbf{R}_4$ est 18, celle de son image est 3 et son degré est 6.

Lemme 8. *L'image par Ψ de $\mathbf{R}_d^4(a)$ est contenue dans la variété des courbes réunion d'une courbe de $\mathfrak{P}_{a-1}$ et d'une courbe de $\mathfrak{P}_{d-a-1}$.*

Démonstration : Il suffit de vérifier ce lemme sur l'ouvert $\mathbf{U}_4$ de $\mathbf{R}_d^4$ et même sur l'ouvert de $\mathbf{R}_d^4(a)$ des courbes ne passant pas par le sommet du cône. Si $f \in \mathbf{R}_d^4(a)$, le sommet du cône $\Upsilon(f)$ est une droite de $\mathbb{P}(V)$. Notons W le quotient de dimension 2 de V qui la définit et N_W le sous-espace de dimension 2 de V correpondant.

Le quotient $\mathcal{L}$ de la flèche $N_W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow f^*Q$ est localement libre de rang 1 si $f(\mathbb{P}^1)$ ne passe pas par le sommet (voir preuve de la proposition 8). Par ailleurs, ce faisceau décrit la trace des génératrices sur la droite $\mathbb{P}(W)$. Son degré est donc donné par le degré de $f(\mathbb{P}^1)$ sur le premier facteur de la quadrique $Q_{\mathbb{P}(W)}$ qui s'identifie à $\mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(\check{N}_W)$. Ainsi $\mathcal{L}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)$. Nous avons donc un quotient naturel S_a de $H^0(f^*Q)$ (dont le noyau est S_{d-a}) tel que l'application linéaire $V \longrightarrow H^0(f^*Q) \longrightarrow S_a$ se factorise par W.

Soient N le noyau et Q le conoyau de la flèche de $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}$ dans K_a (voir notations) déduite de la composée précédente, le faisceau R de support le lieu singulier abstrait est donné par la suite exacte :

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow K_{d-a} \longrightarrow R \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

Mais l'image de $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}$ dans K_a est $W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}$ donc Q est donné par :

$$0 \longrightarrow W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)} \longrightarrow K_a \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

et $N = N_W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}$. Ainsi Q a pour support une courbe de $\mathfrak{P}_{a-1}$. Enfin, le noyau de l'application de R dans Q est donné par le conoyau de la flèche $N_W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)} \longrightarrow K_{d-a}$ ce qui nous dit que son support est une courbe de $\mathfrak{P}_{d-a-1}$.

Si l'élément f de $\mathbf{R}_d^4(a)$ est tel $f(\mathbb{P}^1)$ passe par le sommet du cône, alors le conoyau de la flèche $N_a \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow f^*Q$ est un faisceau ayant de la torsion et la courbe de $\mathfrak{P}_{d-a-1}$ se décompose en une courbe de $\mathfrak{P}_{d'-a-1}$ et les $d-d'$ droites tangentes à la conique déterminées par les points de torsion de ce faisceau.

Lemme 9. *La variété $\mathfrak{P}_n$ est un fermé irréductible et réduit de dimension $2n$ et de degré $l(n)$ de $\mathbb{P}(S^n S_2)$.*

Démonstration : Les courbes de degré n en relation de Poncelet avec la conique canonique sont données par les pinceaux de sections de $H^0 K_{n+1}$. Elles s'identifient ainsi à $\mathrm{Grass}(2, S_{n+1})$ dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 S_{n+1}) = \mathbb{P}(S^n S_2)$ et forment donc une variété irréductible et réduite de dimension $2n$ et de degré :

$$l(n) = \frac{\binom{2n+1}{n+1}}{2n+1} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \quad .$$

Proposition 12. *Les variétés $\mathbf{R}_d^4(a)$ et $\mathbf{R}_d^4(d-a)$ ont la même image par Ψ, elle est irréductible, réduite et isomorphe à $\mathfrak{P}_{a-1} \times \mathfrak{P}_{d-a-1}$. Son degré est $m(a,d)$ que l'on calculera.*

L'image réduite de $\mathbf{R}_d^3(a)$ est isomorphe à $\mathfrak{P}_{a-1} \times \mathbb{P}(S_{d-2a})$ et est formée des courbes réunion de $d-2a$ tangentes à C_0 et d'une courbe de $\mathfrak{P}_{a-1}$ comptée deux fois. Elle est de degré $2^{d-2a} l(a-1)$.

Démonstration : Les variétés $\mathbf{R}_d^4(a)$ et $\mathbf{R}_d^4(d-a)$ étant irréductibles réduites et échangées par dualité, elles ont la même image par Ψ qui est irréductible et réduite. De plus, cette image est de dimension $2d-4$. On a vu au lemme 8 que cette image est contenue dans $\mathfrak{P}_{a-1}\times\mathfrak{P}_{d-a-1}$. Le lemme précédent nous permet de conclure à l'égalité.

On peut calculer le degré $m(a,d)$ de l'image de $\mathbf{R}_d^4(a)$: il suffit de calculer le nombre de courbes réunion d'une courbe de $\mathfrak{P}_{a-1}$ et d'une courbe de $\mathfrak{P}_{d-a-1}$ passant par $2d-4$ points. On choisit $2a-2$ points ($\binom{2d-4}{2a-2}$ choix) et par ces points il passe $l(a-1)$ courbes de $\mathfrak{P}_{a-1}$, par les $2d-2a-2$ points restant il passe $l(d-a-1)$ courbes de $\mathfrak{P}_{d-a-1}$. Le degré est donc $m(a,d)=\binom{2d-4}{2a-2}l(a-1)l(d-a-1)$ sauf dans le cas particulier où $a=\frac{d}{2}$ car on a compté deux fois chaque situation et $m(\frac{d}{2},d)=\frac{1}{2}\binom{2d-4}{d-2}l(\frac{d}{2}-1)^2$.

La construction du lemme 8 est encore valable pour une courbe de $\mathbf{R}_d^3(a)$. Le conoyau de la flèche de $W\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}$ dans K_a est le même et donne une courbe $X\in\mathfrak{P}_{a-1}$. La flèche de $N_W\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}$ dans K_{d-a} se décompose en $\check{W}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}\longrightarrow K_a\longrightarrow K_{d-a}$ ce qui nous donne la courbe X une deuxième fois (conoyau de $\check{W}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}\longrightarrow K_a$) et $d-2a$ droites tangentes à C_0 (conoyau de $K_a\longrightarrow K_{d-a}$). On conclue par irréductibilité car l'image de $\mathbf{R}_d^3(a)$ et la variété $\mathfrak{P}_{a-1}\times\mathbb{P}(S_{d-2a})$ ont la même dimension.

Remarque 11. Une surface générale a pour lieu singulier abstrait une courbe non singulière. En effet, l'image de $\mathbf{R}_d^4(1)$ est $\mathfrak{P}_{d-2}$. Or il existe des courbes lisses dans $\mathfrak{P}_{d-2}$, par généralisation on a le résultat.

Proposition 13. *Une surface est dans $\mathbf{R}_d^4(a)$ si et seulement si son lieu singulier est réunion d'une droite a-uple et d'une courbe de degré $\frac{1}{2}(d-a-1)(d+a-2)$ et celui de sa duale est réunion d'une droite $(d-a)$-uple et d'une courbe de degré $\frac{1}{2}(a-1)(2d-a-2)$.*

Démonstration : Avec les notations ci-dessus la droite $\mathbb{P}(\check{N}_W)$ est multiple pour la duale. La multiplicité de cette droite est le nombre de génératrices de la surface contenues dans le plan correspondant à un point de $\mathbb{P}(\check{N}_W)$. Ceci revient à calculer, pour un sous-espace vectoriel $\mathbb{C}$ de dimension 1 de N_W donné le nombre de points de $\mathbb{P}^1$ tels que la flèche induite $\mathbb{C}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\longrightarrow f^*Q$ soit nulle. Si f est dans $\mathbf{R}_d^4(a)$, cette flèche se factorise par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-a)$ (car $N_W\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ se factorise par ce faisceau) il suffit donc qu'elle s'annule dans $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-a)$. On a donc $d-a$ tels points. Ainsi la duale a une droite $(d-a)$-uple.

De plus la duale $\check{S}$ d'une surface S de $\mathbf{R}_d^4(a)$ est dans $\mathbf{R}_d^4(d-a)$. Nous savons donc que $(\check{S})\check{}$ a une droite a-uple. Ainsi S a une droite a-uple. Pour calculer le degré de la courbe résiduelle, il suffit d'utiliser les résultats de [KL].

Si le lieu singulier abstrait contient une courbe de $\mathfrak{P}_n$ alors les $n+1$ points de la conique définissant un polygône associé correspondent à $n+1$ génératrices de la surface qui se coupent deux à deux. Ceci n'est possible que si elles sont concourrantes ou coplanaires. On a alors une courbe $(n+1)$-uple sur la surface ou sa duale. Si on a une droite $(n+1)$-uple sur la surface ou sa duale, le lieu singulier abstrait contient alors une courbe de $\mathfrak{P}_n$.

Réciproquement, si on a une surface dont le lieu singulier vérifie les hypothèses de la proposition, alors son lieu singulier abstrait contient une courbe de $\mathfrak{P}_{a-1}$ (droite a-uple sur la surface)

et une courbe de $\mathfrak{P}_{d-a-1}$ (droite $(d-a)$-uple de la duale). Pour une raison de degré, le lieu singulier abstrait est réunion de ces deux courbes. Le lieu singulier de cette surface est donc (proposition 12) contenue dans $\Psi(\mathbf{R}_d^4(a))$. Cependant, nous savons (proposition 4) que la fibre au dessus d'un point de $\Psi(\mathbf{R}_d^4(a))$ a deux composantes irréductibles, l'une contenue dans $\mathbf{R}_d^4(a)$ l'autre dans $\mathbf{R}_d^4(d-a)$. Comme la surface contient une droite a-uple elle est dans $\mathbf{R}_d^4(a)$.

Remarque 12. Si $f \in \mathbf{R}_d^4(a) \cap \mathbf{R}_d^4(d-a)$ alors $f(\mathbb{P}^1)$ est tracée sur une quadrique $L_1 \times L_2$ de $\mathbb{G}$ définie par deux droites L_1 et L_2 de $\mathbb{P}(V)$ (c'est l'ensemble des droites qui rencontrent les deux droites). La courbe $f(\mathbb{P}^1)$ est de bidegré $(a, d-a)$ sur la quadrique. Elle a donc $(a-1)(d-a-1)$ points doubles. La surface est alors autoduale et son lieu singulier est réunion de la droite a-uple L_1 de la droite $(d-a)$-uple L_2 et des $(a-1)(d-a-1)$ génératrices correspondant aux points doubles.

2.5 Étude des surfaces de degré 5

Nous décrivons ici les fibres du morphisme $\mathcal{M}(d) \xrightarrow{\Psi} \mathbb{P}(S^{d-2}S_2)$ de façon géométrique dans le cas des surfaces de degré 5. Ceci nous permet de retrouver des résultats de [P1] sur la position relative d'une cubique et d'une conique.

Notons $\mathcal{M}^s(5)$ l'image dans $\mathcal{M}(5)$ de l'ouvert des points stable, $\Psi(\mathcal{M}^s(5))$ s'identifie à $\mathbf{q}_6 \cup \mathbf{q}_5$.

Proposition 14. *La fibre de l'application $\mathcal{M}^s(5) \xrightarrow{\Psi} \mathbf{q}_6 \cup \mathbf{q}_5$ au dessus d'une cubique est donnée par les triangles de Poncelet associés à la cubique.*

Démonstration : Les surfaces de $\mathcal{M}^s(5)$ sont de type 2 : les surfaces de type 1 ou dont la duale est de type 1 sont toutes dans $\mathbf{R}_5^4$ (voir corollaire 4). Le faisceau R définissant le lieu singulier abstrait est alors le conoyau du morphisme injectif $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)} \longrightarrow K_2 \oplus K_3$. De plus, le morphisme canonique (invariant sous le groupe G_2) de V dans H^0K_2 est nécessairement surjectif. Ainsi on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow K_3 \longrightarrow R \longrightarrow 0 \quad (*)$$

où le faisceau N est $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}$ (le faisceau $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}$ est une extension non triviale de K_2 par N). Ceci nous définit une section de K_3 (c'est l'intersection $V \cap H^0K_3$ dans $K_2 \oplus K_3$) qui nous permet d'écrire la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(-1) \xrightarrow{C} \mathcal{I}_Z(2) \longrightarrow R \longrightarrow 0 \quad (**)$$

où Z est la réunion des sommets d'un triangle dont les côtés sont tangents à C_0 et C est l'équation de la cubique support de R.

Ainsi, à toute surface S de $\mathcal{M}^s(5)$ on associe la cubique $\Psi(S)$ et le triangle de Poncelet associé à $\Psi(S)$ défini par la section $V \cap H^0K_3$ de K_3 (qui est invariante sous l'action de G_2).

Réciproquement, si on a une cubique C et un triangle de Poncelet associé de sommets Z, alors la suite exacte $(**)$ permet de retrouver le faisceau R. Pour retrouver le sous-espace vectoriel V de $H^0(K_2 \oplus K_3)$, il suffit de définir un morphisme de $K_2 \oplus K_3$ dans R (V sera le noyau sur les sections). De tels morphismes prolongeant celui de K_3 dans R défini par C et Z (suite exacte $(*)$) sont paramétrisés par $\mathrm{Hom}(K_2, R)$. Cet espace vectoriel est extension de

$\mathrm{Ext}^1(K_2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(-1)) = S_0$ par $\mathrm{Hom}(K_2, K_3) = S_1$. Le sous-groupe unipotent de G_2 est isomorphe à S_1 et agit transitivement sur $\mathrm{Hom}(K_2, K_3)$. Le quotient G_2/S_1 qui est alors isomorphe à $\mathbb{C}^*$ agit par homothéties sur $\mathrm{Ext}^1(K_2, N)$. Ainsi le groupe G_2 a deux orbites dans $\mathrm{Hom}(K_2, R)$ dont l'une est le vecteur nul. Comme $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}$ est une extension non triviale de K_2 par N, cette orbite ne peut convenir. L'autre orbite sous G_2 nous défini un élément de la fibre de C.

Corollaire 7. *Il existe exactement deux triangles de Poncelet associés à une cubique générale de $\mathbb{P}(S_2)$. Il existe une hypersurface de degré 6 de $\mathbb{P}(S^3S_2)$ telle que la cubique générale a un unique triangle de Poncelet associé. Il existe trois fermés irréductibles de codimension 3 et de degrés 5, 30 et 12 de $\mathbb{P}(S^3S_2)$ tels que la cubique générale a une infinité de triangles associés.*

Démonstration : On sait que la fibre de l'application de $\mathcal{M}(5)$ dans $\mathbb{P}(S^3S_2)$ est donnée par deux points au dessus de $\mathbf{q}_6$, un seul au dessus de $\mathbf{q}_5$ et une infinité de points au dessus de $\mathbf{q}_4$. La proposition précédente permet de trouver les deux premiers cas. De plus l'image de $\mathbf{R}_5^4$ est formée de deux composantes : $\mathfrak{P}_3$ et les courbes réunion d'un élément de $\mathfrak{P}_2$ et d'une droite. Ces deux types de courbes ont une infinité de triangles associés et forment deux fermés de codimension 3 de degrés 5 et 30. Enfin l'image du bord de $\mathbf{R}_5$ est formé des courbes réunion d'une conique et d'une droite tangente à C_0. Il y a une infinité de triangles associés à ces courbes. Cette variété est de degré 12.

2.6 Une paramétrisation birationnelle de l'image de Ψ

Dans ce paragraphe, nous donnons une paramétrisation birationnelle de l'image de Ψ qui permet de montrer que l'image est rationnelle. Nous décrivons explicitement cette paramétrisation.

Proposition 15. *Si d est pair, l'image de Ψ est birationnelle à la variété des formes quadratiques de rang 4 de S_{d-2}.*

Démonstration : Supposons que d vaut $2n$. Considérons l'ouvert $\mathbf{R}_{2n,n} \cap \mathbf{R}'_{2n,n}$. Si f est un élément de cet ouvert alors f^*K et f^*Q s'identifient à $U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)$ et $W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ (où U et W sont des espaces vectoriels de dimension 2). La condition de parité est indispensable pour que f^*K et f^*Q aient ces décompositions.

Fixons U et W, nous allons montrer que l'image de Ψ est birationnelle au bon quotient de $\mathbb{P}\mathrm{Hom}(W \otimes \check{U}, S_{d-2})$ par $PGL(U) \times PGL(W)$. Cet espace projectif est isomorphe à l'espace $\mathbb{P}\mathrm{Ext}^1(W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n), U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n))$. Ses points semi-stable pour l'action de $PGL(U) \times PGL(W)$ sont définis par la surjectivité des morphismes $W \otimes S_{d-2} \longrightarrow U$ et $\check{U} \otimes S_{d-2} \longrightarrow \check{W}$.

Un élément de $\mathbb{P}\mathrm{Ext}^1(W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n), U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n))$ définit un faisceau F de rang 4 sur $\mathbb{P}^1$. Le faisceau F est trivial si et seulement si la flèche $W \otimes S_{n-1} \longrightarrow U \otimes S_{n-1}$ est un isomorphisme (ce qui décrit un ouvert plus petit que celui des points semi-stables). Nous pouvons appliquer la construction de la définition 2 sur cet ouvert pour construire une courbe X de degré $d-2$ de $\mathbb{P}(S_2)$. En identifiant F à $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$, nous constatons que l'élément de $\mathbf{R}_{2n,n} \cap \mathbf{R}'_{2n,n}$ ainsi défini a X pour image par Ψ. Nous avons donc construit un morphisme qui a une extension triviale associe la courbe X (voir remarque 13 pour une description explicite). Elle est évidement invariante

sous $PGL(U) \times PGL(W)$, et nous donne une application rationnelle π du bon quotient de $\mathbb{P}\mathrm{Hom}(U\otimes\check{W}, S_{d-2})$ par $PGL(U) \times PGL(W)$ dans l'image de Ψ.

Réciproquement, la donnée de f dans $\mathbf{R}_{2n,n} \cap \mathbf{R}'_{2n,n}$ définit la classe modulo l'action de $PGL(U) \times PGL(W)$ de l'extension suivante :

$$0 \longrightarrow U\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n) \longrightarrow V\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow W\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) \longrightarrow 0$$

qui est un élément de $\mathbb{P}\mathrm{Ext}^1(W\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n), U\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n))$. Le fait que le terme central est trivial impose que la flèche $W\otimes S_{n-1} \longrightarrow U\otimes S_{n-1}$ déduite de l'extension est un isomorphisme. On a donc une extension semi-stable. L'application qui a f associe la classe de cette extension modulo $PGL(U)\times PGL(W)$ est donc à valeur dans le bon quotient. De plus, elle est évidement invariante sous $PGL(V)$ et par dualité (identification entre U et $\check{W}$). Ainsi elle se factorise par l'image de Ψ (au moins sur l'ouvert des points stables). Ceci nous montre que l'application rationnelle π est génériquement bijective. La normalité de $\Psi(\mathbf{R}_d)$ permet de conclure ces deux variétés sont birationnelles.

Enfin le quotient précédent est birationnel à la variété des formes quadratiques de rang 4 de S_{d-2}. En effet, notons q' la forme quadratique de rang 4 sur $W\otimes\check{U}$ et considérons l'application suivante :

$$\begin{gathered}\mathrm{Hom}(W\otimes\check{U}, S_{d-2}) \longrightarrow S^2S_{d-2} \\ \psi \mapsto \psi q'^t\psi\end{gathered}$$

L'image de ce morphisme est la variété des formes quadratiques de rang au plus 4 et la fibre générale du morphisme induit sur les espaces projectifs est $PGL(U) \times PGL(W)$. Le quotient est donc birationnel à la variété des formes quadratiques de rang 4.

Corollaire 8. *L'image de Ψ est rationnelle*

Remarque 13. Nous pouvons calculer explicitement le morphisme π décrit dans la proposition précédente. En effet, soit φ un élément φ de $\mathbb{P}\mathrm{Hom}(U\otimes\check{W}, S_{d-2})$. L'image de π est donnée par le déterminant de la composée suivante : $W\otimes S_{n-2}\otimes S_2 \longrightarrow W\otimes S_n \xrightarrow{\varphi} U\otimes S_{n-2}$ vue comme matrice de taille $2(n-1) \times 2(n-1)$ à coefficients dans S_2.

Considérons φ comme une matrice $(a_{i,j})_{(i,j)\in[1,2]\times[1,2]}$ à coefficients dans S_{d-2} (les polynômes de degré $d-2$ en deux variables). Si Q est un élément de S_k, notons d_Q l'application $S_{x+k} \longrightarrow S_x$ définie par Q (qui vient de $S_{x+k}\otimes S_k \longrightarrow S_x$). Alors l'image de φ par π est donnée par le déterminant de la matrice $2(n-1) \times 2(n-1)$ donnée comme une matrice 2×2 dont les blocs sont : $\big((\mathrm{d}_{x^{k+l}y^{2n-4-(k+l)}}(a_{i,j}))_{(k,l)\in[0,n-2]\times[0,n-2]}\big)_{(i,j)\in[1,2]\times[1,2]}$ pour plus de détails sur les calculs dans les représentations de SL_2 voir [SP].

Remarque 14. Considérons l'espace projectif $\mathbb{P}(S^2S_{d-2})$ comme celui des formes quadratiques sur S_d qui contiennent la courbe rationnelle normale C_d (cf. remarque 7), soit Q une telle forme quadratique, supposons que C_d ne rencontre pas le lieu singulier de Q. Notons Q_0 le lieu lisse de Q, le fibré tangent $T_{Q_0}(1)$ est muni d'une forme quadratique de rang égal à $\mathrm{rg}(Q) - 2$.

Supposons maintenant que d est pair, alors un élément général Q de $\mathbb{P}(S^2S_{d-2})$ vérifie le fait que $T_{Q_0}(-1)|_{C_d}$ est trivial et on a une identification $S_{d-2} \longrightarrow H^0T_{Q_0}(-1)|_{C_d}$. Ce n'est plus

vrai si d est impair. Ainsi, dans le cas pair nous avons défini une application rationnelle p de $\mathbb{P}(S^2 S_{d-2})$ l'espace des formes quadratiques de S_d contenant la courbe rationnelle normale vers $\mathbb{P}(S^2 S_{d-2})$ l'espace des formes quadratiques de S_{d-2}. De plus, l'image d'une forme quadratique de rang k est une forme quadratique de rang $k-2$.

Remarquons enfin que dans le cas des formes quadratiques de rang 6, l'application rationnelle p est la réciproque de l'application rationnelle π de la proposition 15. Elle est donc birationnelle. De même dans le cas des rang inférieurs à 6, les isomorphismes exceptionnels permettent de montrer que p est birationnelle. Je ne sais pas si c'est le cas en général.

Références

[ACGH] *Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba, Phillip A. Griffiths et Joe Harris*, Geometry of algebraic curves I. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **267** (1985), Springer Verlag, NewYork Berlin.

[DE] *Michel Demazure*, A very simple proof of Bott's Theorem. Inventiones mathematicae **33** (1976).

[FH] *William Fulton et Joe Harris*, Representation Theory. GTM **129** (1991), Springer Verlag.

[GR] *Alexander Grothendieck*, Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. IV. Les schémas de Hilbert. Séminaire Bourbaki, Vol. **6**, Exp. No. 221 (1995), Soc. Math. France, Paris.

[GP] *Laurent Gruson et Christian Peskine*, Courbes de l'espace projectif : variétés de sécantes. Enumerative Geometry and Classical Algebraic Geometry. PM **24** (1982), Boston, Basel, Stuttgart : Birkhäuser.

[HT] *Joe Harris et Loring W. Tu*, On symmetric and skew-symmetric determinantal varieties. Topology **23** (1984).

[KL] *Steven L. Kleiman*, The enumerative theory of singularities. Nordic Summer School/ NAVF Symposium in mathemetics Oslo (1976).

[KO] *János Kollár*, Quotient spaces modulo algebraic groups. Ann. of Math. **145** (1997) no. 1.

[MFK] *David Mumford, John Fogarty et Frances Kirwan*, Geometric invariant theory, Third edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2), **34** (1994), Springer-Verlag, Berlin.

[P1] *Nicolas Perrin*, Courbes rationnelles sur les variétés homogènes. Preprint disponible sur math.AG/0003199 (2000).

[P2] *Nicolas Perrin*, Deux composantes du bord des instantons de degré 3. Preprint disponible sur math.AG/9901011 (2000).

[SP] *Tonny A. Springer*, Invariant theory. Lecture Notes in Mathematics, Vol. **585** (1977), Springer-Verlag, Berlin-New York.